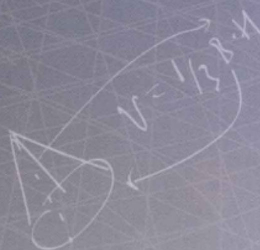


浙江省高等教育重点建设教材

Scientific Development with Mathematics

数学与科学进步

◎ 叶立军 编著





ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

内容简介

本教材以构建符合现代社会理念并能体现科技进步水平的教学知识体系为目标，体现大学教学内容的时代性、先进性、学术性和适切性特点，体现数学无处不在、无孔不入的实用价值，树立人人学习数学、人人学习有用的数学、人人学习有价值的数学的大众数学观念。

本教材介绍数学发展简史以及数学方法论知识，数学在物理学、生物学、化学、天文学、地理学等自然科学进步中的重要意义以及现代数学与社会科学、文化艺术的联姻。通过学习，让学生了解数学在科学进步中的重要性以及掌握必备的数学方法论知识，切实提高大学生的数学素养。

本书适合作为高等院校通识课教材使用，也适合中小学数学教师、教研员以及数学爱好者阅读，也可作为数学教师培训教材。


ISBN 978-7-308-08212-9

定价：29.00元

Scientific Development with Mathematics

数学与科学进步

● 叶立军 编著



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学与科学进步 / 叶立军编著. —杭州：浙江大学出版社，2010.12

ISBN 978-7-308-08212-9

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①叶…　Ⅲ.①数学—关系—技术进步　Ⅳ.①01

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 239666 号

数学与科学进步

叶立军　编著

责任编辑　阮海潮（ruanhc@zju. edu. cn）
封面设计　联合视务
出版发行　浙江大学出版社
（杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007）
（网址：http://www. zjupress. com）
排　　版　杭州中大图文设计有限公司
印　　刷　杭州日报报业集团盛元印务有限公司
开　　本　710mm×1000mm　1/16
印　　张　16
字　　数　246 千
版 印 次　2011 年 1 月第 1 版　2011 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-08212-9
定　　价　29.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话　（0571）88925591

一 二 三 亖 ㄨ ㄊ ㄅ ㄆ ㄢ ㄋ

前言 Preface

数学是一门应用非常广泛的学科。数学家华罗庚曾经说过："宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生活之迷，日月之繁，无处不用数学。"同时，数学是人类探究世界，研究自然界任何事物的核心。没有数学就没有物理学、化学、生物学，人类将永远停滞不前。可以说，数学是整个宇宙的骨架，我们很难找到与数学无关的东西。

数学不仅是一种重要的"工具"或"方法"，也是一种思维模式，即"数学方式的理性思维"；数学不仅是一些知识，也是一种素质，即"数学素质"；数学不仅是一门科学，也是一种文化，即"数学文化"。作为现代科技和社会科学的一门基础学科，一个人具备的数学知识和实践能力，相当程度上影响着他的研究与创造能力。随着经济和科学技术的进步，尤其是计算机技术的飞速发展，数学对于当代科学乃至整个社会的影响和推动作用日益显著，数学的发展水平和应用水平已成为衡量一个社会文明程度的标志之一。

当今，随着社会、科学技术的不断发展，数学方法及计算已经与理论研究和科学实验一样成为科学研究中不可缺少的有效手段，数学方法和科学技术已"形影不离"，正产生着翻天覆地的影响。在现代认识和实践活动中，人们更多、更强烈地谈论着数学的作用，把我们所处的时代称为"知识数学化"的时代。

同时，当代自然科学与社会科学又日益呈现交叉发展的趋势，现代数学几乎已经渗透到包括自然科学、工程技术、经济管理以至人文社会科学的所有学科和应用领域中，从宇宙飞船到家用电器、从质量控制到市场营销，通过建立数学模型、应用数学理论和方法并结合计算机解决实际问题成为十分普遍的模式。即使是从事社会科学研究的专业人员，也需要掌握相当的

数学应用能力。一些诺贝尔经济学奖的获得者，其研究成果的取得，都是在经济模型、社会统计、金融分析中很好地运用了数学科学知识的结果。纵观日新月异的现代科技、经济与社会的发展，时代要求一个专门技术人才，不仅要掌握一定的数学科学知识，而且要具备一定的数学实践能力，具有良好的数学素质。

为了提高大学生的数学素养，本教材力求正确反映数学在科学进步中的真正意义，从而使学生意识到数学的重要性，从而提高学生学习数学的兴趣，切实掌握数学思想方法，运用于所学的学科。

本教材以构建符合现代社会理念并能体现科学进步水平的教学知识体系为目标，体现大学教学知识的时代性、先进性、学术性和适切性特点，体现数学无处不在、无孔不入的实用价值，树立人人学习数学、人人学习有用的数学、人人学习有价值的数学的大众数学观念。通过学习，使大学生掌握数学方法论知识，切实提高大学生的数学素养。

本书介绍数学发展历史以及数学方法论知识，数学在自然科学进步中的重要意义以及现代数学与社会科学的联姻。通过学习，让学生了解数学在科学进步中的重要性以及掌握必备的数学方法论知识。

本书由叶立军编著，全书共八章，其中，王运庆参与了第四章的编写工作，王晓楠参与了第五章的编写工作，李燕参与了第六章的编写工作，斯海霞参与了第七、八章的编写工作。

本书入选浙江省高等教育重点教材建设项目，在编写过程中得到了杭州师范大学教务处、理学院领导的大力支持，在此表示衷心的感谢。感谢浙江大学出版社阮海潮副编审为本书出版付出的辛勤劳动。

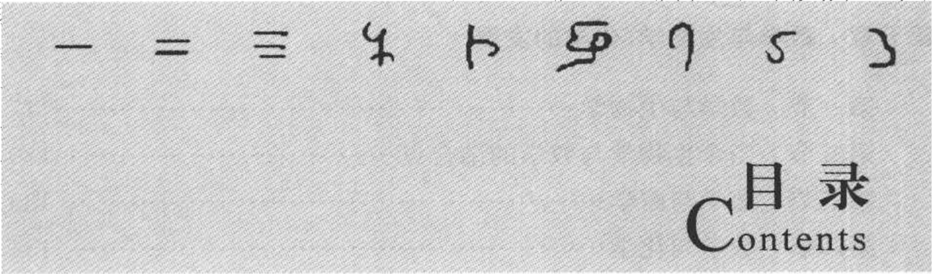
本书在编撰过程中吸收了许多专家学者的研究成果，在此表示衷心的感谢。

由于本书作者学识有限，时间仓促，书中难免有不当之处，恳请各位专家、广大师生批评指正。

叶立军

于杭州西子湖畔

2011 年 1 月



第一章　数学及其发展简史

第一节　数学是什么 …… 3
第二节　数学发展简史 …… 14
第三节　数学发展史上的几次重大突破 …… 20
第四节　近代数学的主要成就 …… 40
第五节　现代数学的研究进展 …… 43

第二章　作为思想史要素之一的数学

第一节　数学思想方法概述 …… 51
第二节　数学思想方法在科学中的作用和地位 …… 54
第三节　常用的数学思想方法 …… 61

第三章　数学悖论与数学危机

第一节　数学悖论 …… 77
第二节　数学危机 …… 81
第三节　数学基础的三大学派 …… 90

第四章　数学与物理学的发展

第一节　数学与物理基本概述 …… 97
第二节　数学发展史上与物理学进步有关的事件 …… 99
第三节　现代数学在物理学中的应用 …… 109

第五章　数学与生物学、化学的发展

第一节　数学与生物学…… 117
第二节　当今生物学与数学的结合点…… 130
第三节　数学与医学…… 133
第四节　数学与化学…… 134
第五节　数学在化学中的应用　元素周期表的发现…… 141

第六章　数学与天文学、地理学的发展

第一节　数学与天文学发展概述…… 149
第二节　数学在天文学中的几个应用…… 151
第三节　数学与地理学的发展…… 155

第七章　数学与社会科学的发展

第一节　数学与政治…… 167
第二节　数学与战争…… 176
第三节　数学与经济…… 184

第八章　数学与文化艺术

第一节　数学与文化…… 201
第二节　数学与艺术…… 204
第三节　数学与建筑…… 218

附录 1　数学与诺贝尔经济学奖…… 230
附录 2　数学趣题…… 236
附录 3　希尔伯特的 23 个问题…… 245

参考文献…… 249



第一章

数学及其发展简史

数学是打开科学大门的钥匙。

——培根

数学是人类智慧皇冠上最灿烂的明珠。

——考特

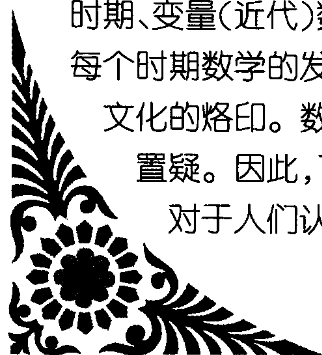
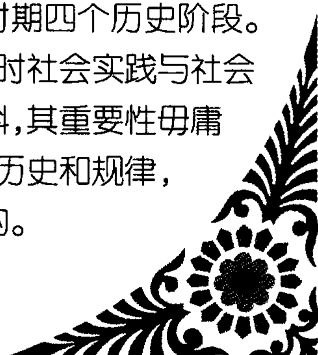
一个国家只有数学蓬勃地发展，才能展现它国力的强大。数学的发展和完善与国家繁荣昌盛密切相关。

——拿破仑

数学是一门古老的学科，它从萌芽时期发展至今已经有数千年的历史。数学的发展史不只是一些新概念、新命题的简单堆砌，它包含着数学思想和方法的积淀，尤其是数学本身许多质的飞跃，即数学思想方法的重大突破。

对数学思想方法作历史的考察，并分析其演变、发展的规律是数学思想方法研究的首要内容。其具体可分为两大类：第一，数学思想方法的系统进化，即从整体上进行研究。例如，从古至今，数学思想方法发生了多少次重大转折，每一次转折（如从算术到代数、从综合几何到几何代数化、从常量数学到变量数学、从必然数学到或然数学、从明晰数学到模糊数学以及从手工证明到机器证明等）都是怎么孕育和产生的，其要点和作用是什么，均属于这一类。第二，数学思想方法的个体发育，主要是研究每一个数学思想产生、演变和发展的规律，以及本身的特征，在数学发展过程中的作用和方法论价值等。广义讲，从思想方法角度来研究概念、运算、公式、定理乃至学科产生发展的历史，也可看成是此类研究的范围。

数学，作为一门科学，它来源于人类社会进步，并促进人类社会进步，也随着人类社会的进步而发展。数学的起源可以追溯到原始社会，经历了数学萌芽时期、常量数学时期、变量（近代）数学时期、现代数学时期四个历史阶段。每个时期数学的发展，都深深印上了当时社会实践与社会文化的烙印。数学作为一门基础学科，其重要性毋庸置疑。因此，了解数学思想的发展历史和规律，对于人们认识数学是完全必要的。

第一节 数学是什么

一、什么是数学？

数学具有高度的抽象性、严谨的逻辑性和广泛的适用性。这是关于数学学科特点的传统看法。近些年来，随着数学的发展与人们认识的深化，对数学学科特点又提出了一些新的见解。比如，有人指出数学的基本特点是确切性、抽象性、严格性、应用的广泛性、数学美，还特别强调，数学美是数学诸特点中不可忽视的基本特点之一。人类进入以物质装置代替原来由人从事的信息加工处理工作的信息时代（或称信息加工时代、计算机时代）后，数学的上述诸特点进一步显示出来。也有人认为，从当前科学数学化的趋势看，高度的抽象性与广泛的适用性是数学最根本的两个特点。还有人主张，数学的主要特点是它的高度抽象性、严谨逻辑性与数学美，而应用的广泛性是高度抽象性和严谨逻辑性的具体表现。数学作为一门基础科学到底有哪些特点？结合现代科学发展的实际对这一问题加以深入探讨，显然对充分发挥数学的功能，促进数学的发展是有积极作用的。

同时，数学具有多方面的功能，主要表现在以下三个方面：①科学功能，即数学在自然科学、社会科学和哲学等领域中所起的作用；②思维功能，即数学作为一种思维工具，它在日常思维活动中所起的作用，以及它对思维科学发展的意义等；③社会功能，即数学在社会生产、经济、文化、教育以及在精神文明建设中占有的地位与作用等。数学为什么会有上述功能？怎样才能更好地发挥它的功能？这些问题在科学技术高度发展的今天，显得特别重要。

二、数学是什么科学？

数学本质的另一个问题：数学究竟是什么科学？是演绎科学，还是经

验科学呢？或是实验归纳科学呢？由于人们从不同的角度来认识数学，因而对这个问题有着不同的看法。

1. 数学是基本语言

时空的语言是几何，天文学的语言是微积分，量子力学要透过算子理论来描述，而波动理论则靠傅立叶分析来说明。数学家研究这些科目，最先都由于其本身之美所感召，但最后却发现这些科目背后，竟有些共通的特性。这个事实说明了看起来并不相关的科目，它们之间可以有甚多交缠互倚的地方。

语言是一种符号，用以传情达意，但是我们的感情由于语言的不同而有着不同的发展。举例来说，中国诗与英文诗的不同之处，在于前者着重每个单字的用法，每个单字都具有不同的意义。然而，就算在中国诗内，字的多寡也左右了要表达的感情。古诗较随意，汉诗以五言为主，唐代则重七言，到了宋代，流行的便是长短句——词了。不同的体裁，微妙地反映和影响了不同朝代文人的感受。

因此，数学这个科学语言的研究改变了科学发展的航道。举例而言，对傅立叶分析的理解越深入，就越能理解波的运动及图像的技巧。反之，现实世界也左右了数学的发展。波运动及其谱所显示的美，乃是这些科目发展的原动力。这些学科对现代技术及理论科学的影响极其深远。没有微积分这种起源于阿基米德的伟大语言，很难想象牛顿能发展古典力学。

毫无疑问，法拉第精通电学和磁学。但电磁学的完整理论则要归功于麦克斯韦方程。电磁学对光、无线电波和现代科学的研究是极为重要的。

2. 数学是秩序的科学

除了作为一种语言，以及一门纯美的学科外，数学还是秩序的科学(a science of order)。我们引一段美国数学学会前会长、哈佛大学教授格臣(Andrew Gleason)的说法：

数学乃是秩序的科学，它的目的是发现、刻画、了解外观复杂情况的秩序。数学中的概念，恰好能够描述这些秩序。数学家花了几百年来寻找最有效地描述这些秩序的精微曲折处。这种工具可用于外在世界，毕

竟现实世界是种种复杂情况的缩影，其中包含大量的秩序。

由是观之，数学能广泛用于经济学，是毫不奇怪的。好几个诺贝尔经济学奖获得者，其工作皆与数学有关。

3. 作为工具的数学

大量重要的数学，原意是为解决工程上的问题。比如，维纳（N. Wiener）及其弟子，是信息科学的先驱，他们发展出来的如随机微分方程、维纳测度论、熵论等，最终都远远超出它们原来的动机。Bucy-Kalman 滤子理论在现代控制论中举足轻重，而冲击波则在飞机设计方面起着关键的作用。

4. 数学是模式的科学

《现代汉语词典》对“模式”的解释是指“某种事物的标准形式”。这种标准形式是通过抽象、概括而产生的。按照这种解释，数学的概念、理论、公式、定理和方法都可以看成是一种模式。显然它们又是一种数学抽象思维活动的产物。这种抽象不同于其他科学中的抽象。首先，在抽象的内容上，它仅仅保留了事物的量的特性，而舍去了它的质的内容。其次，在抽象的度量上，数学中的概念，并非都是真实事物或现象的直接抽象的结果，而是在第一次抽象的基础上进行多次的再抽象，换句话说，是由概念引出概念。如正方形是由长方形引出的概念。再次，在抽象的方法上，它是一种“建构”的活动，也就是说，数学的对象是借助于明确的定义得到构造的，数学理论又是建立在逻辑演绎之上来展开的。我们不妨通过几个例子的研究来说明这点。

（1）关于数学概念的模式

我们知道“1”这个数，是对一个人、一棵树、一间房等一类事物的量的特性的刻画，是抽象思维的产物。实际上，在现实世界里并不存在作为数学研究对象的真正的“1”。又如，现实世界中，我们只看到圆形的十五的月亮，圆形的水池，圆形的车轮，而数学概念中的“圆”，则是这类事物的标准形式，反映了这类事物都具有的“到一个定点的距离等于定长”的量的特性。

在高等数学中，我们知道瞬时速度可以看成是距离对时间的导数，即 $v=\frac{ds}{dt}$；同样，电流强度 I 是电量 Q 对时间 t 的导数，表示为 $I=\frac{dQ}{dt}$；切线

斜率是曲线 $y=f(x)$ 的纵坐标 y 对横坐标 x 的导数，记为 $\tan\alpha=\frac{dy}{dx}$。

我们如果将距离、电量、曲线等一类事物都抽象成关于 x 的函数 $f(x)$，那么刻画函数的变化率这一普遍意义的现象，可以用导数这一标准形式——模式来表示。这样，我们把数学概念都可以看成是量化模式。

(2)关于数学问题的模式

下面的两个问题，我们如果从质的方面来看，显然是两个不同的问题，但若从量的属性角度来看，却是同一个标准形式。

①某人有两套不同的西装和三条不同颜色的领带，问共有多少种搭配方法？

②有两个军官和三个士兵，现由一个军官和一个士兵组成巡逻队，问共有多少种组合方法？

这类问题，如果我们都舍去各自的质的内容，那么它们就可以抽象成下面的形式(图 1-1)：

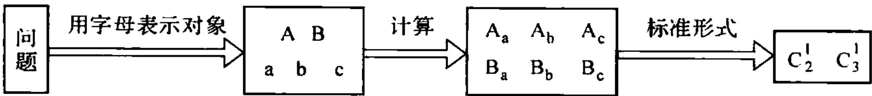


图 1-1

从方框图的推演可以看出，实际问题化归成了数的组合问题。这个过程就是关于量化模式的一种建构和研究。

三、数学的特点

关于数学所具有的特点，可以把数学和其他学科相比较，这样特点就十分明显了。

同其他学科相比，数学是比较抽象的。数学的抽象性表现在哪里呢？那就是暂时撇开事物的具体内容，仅仅从抽象的数方面去进行研究。比如在简单的计算中，2＋3 既可以理解成两棵树加三棵树，也可以理解成两台机床加三台机床。在数学里，我们撇开树、机床的具体内容，而只是研究 2＋3 的运算规律，掌握了这个规律，那就不论是树、机床，还是汽车或者别的什么事物都可以按加法的运算规律进行计算。乘法、除法等运

算也都是研究抽象的数，而撇开了具体的内容。

1. 具有高度的抽象性和形式化

任何科学思维都具有抽象性的特点，然而数学的抽象是一种高度的抽象，它只保留事物量的关系或空间形式而舍弃其他一切特性，即暂时撇开客观对象的其他一切特征，而只对事物的量或空间形式经过高度抽象，在“纯粹”状态下进行研究。另一方面，它的推导和演算又都是用符号形式（包括图形、图表）来表示的，也就是运用一套形式化的数学“语言”，这种“语言”也可成为物理学科的表达方式。正是由于数学方法的抽象性和形式化，它才能概括许多共同的事物规律和本质，大大简化和加速思维进程。同时，客观物质世界是极其复杂的，有许多事物的内在联系，用通常的语言文字只能意会，难以言传，而用数学语言却能简洁、精确地表达清楚。

数学中的许多概念都是从现实世界抽象出来的。比如几何学中的“直线”这一概念，并不是指现实世界中的拉紧的线，而是把现实的线的质量、弹性、粗细等性质都撇开了，只留下了“向两方无限伸长”这一属性，但是现实世界中是没有向两方无限伸长的线的。几何图形的概念、函数的概念都是比较抽象的。但是，抽象并不是数学独有的属性，它是任何一门科学乃至全部人类思维都具有的特性，只是数学的抽象性有它不同于其他学科抽象的特征罢了。

数学的抽象性具有下列三个特征：第一，它保留了数量关系或者空间形式。第二，数学的抽象是经过一系列的阶段形成的，它达到的抽象程度大大超过了自然科学中的一般抽象。从最原始的概念一直到像函数、复数、微分、积分、泛函、n 维甚至无限维空间等抽象的概念都是从简单到复杂、从具体到抽象这样不断深化的过程。当然，形式是抽象的，但是内容却是非常现实的。正如列宁所说的那样：“一切科学的（正确的、郑重的、不是荒唐的）抽象，都更深刻、更正确、更完全地反映着自然”（《黑格尔〈逻辑学〉一书摘要》，《列宁全集》第 38 卷第 181 页）。第三，不仅数学的概念是抽象的，而且数学方法本身也是抽象的。物理学家或化学家为了证明自己的理论，总是通过实验的方法；而数学家证明一个定理却不能用实验的方法，必须用推理和计算。比如，虽然我们千百次地精确测量等腰三角

形的两底角都是相等的，但是还不能说已经证明了等腰三角形的底角相等，而必须用逻辑推理的方法严格地给予证明。在数学里证明一个定理，必须利用已经学过或者已经证过的概念、定理用推理的方法导出这个新定理来。我们都知道数学归纳法，它就是一种比较抽象的数学证明方法。它的原理是把研究的元素排成一个序列，某种性质对于这个序列的首项是成立的，假设当第 k 项成立，如果能证明第 $k+1$ 项也能成立，那么这一性质对这一序列的任何一项都是成立的，即使这一序列是无穷序列。

2. 具有严格性和逻辑性

也可以说，数学的第二个特点是准确性，或者说逻辑的严密性，结论的确定性。数学的严格性突出表现在两个方面：一是推理过程的严格、可靠；二是推理结论的精确、确定。数学都是以逻辑推理的形式表达量的关系或空间形式的，数学的一切结论只需由也必须由严格的逻辑推理来得出。因此，一切数学结论都具有逻辑上的必然性和量的确定性。正因为这样，数学方法才给予精密的自然科学以某种程度的可靠性，没有数学，这些科学是达不到这种可靠性的。

数学的推理和它的结论是无可争辩、毋容置疑的。数学证明的精确性、确定性从中学课本中就充分显示出来了。

欧几里得的经典著作《几何原本》可以作为逻辑的严密性的一个很好的例子。它从少数定义、公理出发，利用逻辑推理的方法，推演出整个几何体系，把丰富而零散的几何材料整理成了系统严明的整体，成为人类历史上的科学杰作之一，一直被后世推崇。2000 多年来，所有初等几何教科书以及 19 世纪以前一切有关初等几何的论著都以《几何原本》为根据。“欧几里得”成为几何学的代名词，并且人们把这种体系的几何学叫做欧几里得几何学。

但是数学的严密性不是绝对的，数学的原则也不是一成不变的，它也在发展着。比如，前面已经讲过《几何原本》也有不完美的地方，某些概念定义得不明确，采用了本身应该定义的概念，基本命题中还缺乏严密的逻辑根据。因此，后来又逐步建立了更严密的希尔伯特公理体系。数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的科学。任何事物都有一定的量，原则上都可以作为数学的研究对象。物理学是一门精确的定量科学，它

与数学的关系最为密切。马克思早在100多年前就指出："一门科学只有成功地应用数学时，才算达到了真正完善的地步。"物理研究离不开数学方法，进一步研究数学方法在物理研究中的应用是非常必要的，也具有重要的意义。

3. 应用的广泛性

我们几乎每时每刻都要在生产和日常生活中用到数学，如丈量土地、计算产量、制订计划、设计建筑都离不开数学。没有数学，现代科学技术的进步也是不可能的，从简单的技术革新到复杂的人造卫星的发射都离不开数学。而且，几乎所有的精密科学、力学、天文学、物理学甚至化学通常都是以一些数学公式来表达自己的定律的，并且在发展自己的理论的时候，广泛地应用数学这一工具。当然，力学、天文学和物理学对数学的需要也促进了数学本身的发展，比如力学的研究就促使了微积分的建立和发展。

数学的高度抽象性，使它成为不受任何具体内容局限的形式科学，这种抽象性带来了应用的普遍性。现代数学作为认识事物的工具，不仅已向自然科学和社会科学全面渗透，而且还在作为一种语言系统广泛渗透到人们的认识和实践中。随着信息时代的到来和计算机的普遍应用，数学方法正更加广泛地渗透到科学技术的各个领域，数学化、计量化已成为科学技术发展的一个重要趋势。

数学的抽象性往往和应用的广泛性紧密相连，某一个数量关系，往往代表一切具有这样数量关系的实际问题。比如，一个力学系统的振动和一个电路的振荡可用同一个微分方程来描述。撇开具体的物理现象中的意义来研究这一公式，所得的结果又可用于类似的物理现象中，这样，我们掌握了一种方法就能解决许多类似的问题。对于不同性质的现象具有相同的数学形式，就是相同的数量关系，是反映了物质世界的统一性，因为量的关系不只是存在于某一种特定的物质形态或者它的特定的运动形式中，而是普遍存在于各种物质形态和各种运动形式中，所以数学的应用是很广泛的。

正因为数学来自现实世界，正确地反映了客观世界联系形式的一部分，所以它才能被应用，才能指导实践，才表现出数学的预见性。比如，在

火箭、导弹发射之前，可以通过精密的计算，预测它的飞行轨道和着陆地点；在天体中的未知行星未被直接观察到以前，可从天文计算上预测它的存在。同样的道理使数学成为工程技术中的重要工具。

下面举几个应用数学的光辉例子。

海王星的发现。太阳系中行星之一的海王星是1846年在数学计算的基础上发现的。1781年发现了天王星以后，科学家观察它的运行轨道总是和预测的结果有相当程度的差异，是万有引力定律不正确呢，还是有其他的原因？有人怀疑在它周围有另一颗行星存在，从而影响了它的运行轨道。1844年英国的亚当斯(1819—1892)利用引力定律和对天王星的观察资料，推算这颗未知行星的轨道，他花了很长的时间计算出这颗未知行星的位置，以及它出现在天空中的方位。亚当斯于1845年9—10月把结果分别寄给了剑桥大学天文台台长查理士和英国格林尼治天文台台长艾里，但是查理士和艾里迷信权威，把它束之高阁，不予理睬。

1845年，法国一位年轻的天文学家、数学家勒维烈(1811—1877)经过一年多的计算，于1846年9月写了一封信给德国柏林天文台助理员加勒(1812—1910)，信中说："请你把望远镜对准黄道上的宝瓶星座，就是经度326°的地方，那时你将在那个地方1°之内，见到一颗九等亮度的星。"加勒按勒维烈所指出的方位进行观察，果然在离所指出的位置相差不到1°的地方找到了一颗在星图上没有的星——海王星。海王星的发现不仅是力学和天文学特别是哥白尼日心学说的伟大胜利，而且也是数学计算的伟大胜利。

谷神星的发现。1801年元旦，意大利天文学家皮亚齐(1746—1826)发现了一颗新的小行星——谷神星，不过它很快又躲藏起来，皮亚齐只记下了这颗小行星是沿着9°的弧运动的，对于它的整个轨道，皮亚齐和其他天文学家都没有办法求得。当时年仅24岁的高斯(1777—1855)根据观察的结果进行了计算，求得了这颗小行星的轨道。天文学家们于这一年的12月7日在高斯预先指出的方位又重新发现了谷神星。

电磁波的发现。英国物理学家麦克斯韦(1831—1879)概括了由实验建立起来的电磁现象，呈现为二阶微分方程的形式。他用纯数学的观点，从这些方程推导出空间存在着电磁波，这种波以光速传播着。根据这一

点，他提出了光的电磁理论，这理论后来被全面发展和论证了。麦克斯韦的结论还推动了人们去寻找纯电起源的电磁波，比如由振动放电所发射的电磁波。这样的电磁波后来果然被德国物理学家赫兹(1857—1894)发现了。这就是现代无线电技术的起源。

1930年，英国理论物理学家狄拉克(1902—1984)利用数学演绎法和计算预言了正电子的存在。1932年，美国物理学家安德逊在宇宙射线实验中发现了正电子。

类似的例子不胜枚举。总之，在天体力学中、在声学中、在流体力学中、在材料力学中、在光学中、在电磁学中、在工程学中，数学都作出了异常准确的预言。

四、数学促进人类思想解放

从历史上看，数学促进人类思想解放大约有两个阶段，第一个阶段从数学开始成为一门科学直到以牛顿为最高峰的第一次科学技术革命。不妨说，在这个时期中，数学帮助人类从宗教和迷信的束缚下解放出来。这一阶段始于人类文化萌芽的时期，尽管在那时不少民族都有了一定的数学知识的积累，但数学还没有形成一门科学。数学的作用主要是为解决人类物质生活中的具体问题。人类刚从蒙昧中觉醒，迷信、原始宗教还控制着人类精神世界。三大宗教的出现还是比较晚的事了。在远古的一些民族中，数学对人类精神生活的影响还只表现在卜卦、占星上，成为"神"与人之间沟通的工具。一直到了希腊文化的出现，开始有了我们现在所理解的数学科学，其突出的成就就是欧几里得几何学。它的意义是：在当时的哲学理论的影响与推动下，第一次提出了认识宇宙的数学设计图的使命，第一次提出了人的理性思维应该遵循的典范。由于当时世界各部分相对地比较隔绝，这个数学文化影响所及大抵还只是地中海沿岸。希腊衰落，罗马人取而代之，这个文化的影响也逐渐转向东罗马和阿拉伯地区。欧洲逐渐进入黑暗的中世纪。到新的生产关系开始出现，人类需要一种新文化以与当时占统治地位的天主教相对抗，希腊文化渐渐复活了起来，形成所谓"文艺复兴"(这当然不会是原来的希腊文化)。数学直接继承了希腊的数学成就，终于成了当时科学技术革命的旗帜，它的主题仍

然是“认识宇宙，也认识人类自己”。它与宗教的矛盾日益深刻，尽管有宗教裁判所和它的酷刑，但上帝的地位还是逐渐被贬低了。到了牛顿时代，当时的科学技术革命达到了顶峰，而上帝的地位也下降到了低谷。牛顿的自然神论离彻底的无神论只有一步之遥。人的地位上升了。他凭借着理性旗帜要求成为大自然的统治者。当时的技术革命，其科学基础是牛顿力学，而从文化思想上说，其实是机械师和工匠的革命。人对大自然的“统治”，也只是一个工匠认识了一部大机器，开动了这部大机器，并且局部地模仿与复制这部大机器。但是这个工匠仍时而打着上帝的旗号。人尽管要求以自己的理性来重新安排人类自己的生活，但人对自己的看法，以朱利安·奥夫鲁瓦·德·拉·美特利(Julien Offroy De La Mettrie, 1709—1751，法国机械唯物论哲学家)的口号为标志也就是“人是机器”。机械唯物论的决定论，是当时的科学技术革命的指导思想，而数学是它的最主要的武器。当时数学的发展以微积分的出现为其最高峰，在这个时期确实取得了极其辉煌的胜利。由希腊起源的这个文化，现在从地域上说已成了全世界的文化。作为它的一个重要组成部分的数学也就不再只是希腊的数学，而成为全人类的数学文化。其他有些民族尽管在数学上有过灿烂的成就，但是现在其影响和作用比起希腊文化中的数学，也就瞠乎其后，不能相比了。有一些民族的成就被吸收到这个新的全人类的数学中，甚至起了极其重要的作用，特别是印度和阿拉伯的数学是如此；另有一些就成了历史的陈迹了。对于中国人来说，重要的不是在历史的丰碑面前凭吊怀古，而是奋起直追。明末清初，先进的中国人开始理解这一点。徐光启开始翻译欧几里得的《几何原本》，康熙皇帝亲自主编过堪称为中国的《几何原本》的《数理精蕴》，这表明中国人正在开始脚踏实地地学习直接由希腊数学发源的新的全人类的数学。总之，这是一次伟大的思想解放运动。从当时世界范围来看，是人类逐渐从宗教的统治下解放出来。从中国来看，尽管由于历史的、社会的原因，宗教的思想统治不如当时欧洲之烈，但到了17世纪，资本主义萌芽已经在中国出现，中国人也要求一种新的生产关系及其文化。特别是鸦片战争以后，中国人更要求反抗帝国主义的侵略，这样，自然也要求新的文化。17世纪以后，现代的数学传入了中国，开始为中国人所接受，并与中国固有的文化相抗衡，成为中国

人求解放求富强的思想武器，正是这个历史潮流的反映。

第二阶段由 18 世纪末算起。那时，数学化的物理学、力学、天文学已经取得了惊人的进展，可是人们越来越要求从完全的决定论下解放出来。这其中有社会、政治的原因，也有文艺、哲学上的反映，我们就不去讨论了。但是有一点很明显，数学的重要性已经不如前一个阶段了。当时科学发展的最重大的问题是要求用一个发展的观点，把世界看作一个发展的、进化的、各部分相互联系的整体。黑格尔哲学提出唯心主义的辩证法，以一种扭曲的形式回答了这个问题。他认为“绝对观念”是宇宙的本质，“绝对观念”在发展过程中“外化”为物质，并且按照由低级到高级的方向，由无机物发展到有机体，有了生命，然后从低级生物发展到高级生物，然后成为人。最后，“绝对观念”又在人的意识的发展中复归为自身。黑格尔的自然哲学是他的哲学体系中最薄弱的一环，其原因之一在于当时自然科学的发展提供的基础所限。马克思、恩格斯的功绩就是在唯物主义的基础上改造了辩证法，形成了辩证唯物主义。这一发展除了社会的、历史的背景以外，还有自然科学的基础。能量的守恒与转化（与热机、热力学的发展相关）、细胞的发现，特别是达尔文的进化论，就是最突出的几件大事。这样，数学自然从人们的视野中后退。数学家倒没有因此而失望，因为他们继续为人类做出了重大的贡献，而其意义甚至是他们自己也未曾预料到的。数学家这个时期的工作，一方面是继续扩展已有的成就，另一方面是向深处进军。这里最突出的事例一是非欧几何的发现，二是关于无限的研究。前者根本改变了我们对空间的本性的认识。后者是由微积分的基础研究开始的，也说明从希腊时代的芝诺悖论（《庄子·天下篇》中的“飞鸟之景，未尝动也”和芝诺悖论几乎是完全一样的。可惜的是，这些思想一直停留在抽象的思辨上而没有具体展开。这当然与数学没有在中国很好发展有关）所揭示的有限与无限的矛盾是何等深刻。特别是非欧几何的出现是人类思想的又一次大革命。它仍然是一种思想解放：这一次是从人自己的定义下解放出来。数学的对象越来越多的是“人类悟性的自由创造物”。这件事引起了多少人对数学的误解和指责，但实际上是人类的一大进步。人在自己的成长中发现，单纯凭着直接的经验去认识宇宙是不够的。人既然在物质上创造出了自然界中本来没有的东

西——一切工具、仪器等等来认识和创造世界，为什么不能在思维中创造出种种超越直接经验的数学结构来表现自然界的本来面目呢？数学的这一进步在当时并没有超出牛顿力学的决定世界观，但非欧几何的确从根本上动摇了牛顿的时空观，为相对论的出现开辟了道路。对数学本身更有深远意义的是，这两件大事（非欧几何的出现和关于无限的研究）导致了对数学基础的研究，使人类第一次十分具体而严格地提出了理性思维能力的界限何在的问题。

那么，现在是否又到了一个新的阶段？我们暂时不必去回答，但是十分明显的是，数学的发展确实给人类的生活开辟了新天地。这不但是指文化思想上，而且也是指物质上。相对论的意义大概谁也不能低估了，如果再加上量子物理（同样，没有第二阶段的数学的发展以及伴之而来的种种人类悟性的自由创造物，就不可能有量子物理），则现代物理科学构成当代各种新技术的科学基础，这是谁也不能否认的事。人们都说 21 世纪将是计算机的世纪，其特征是计算机能够或多或少地模仿或复制人的思维。也只有数学发展到今天的高度，计算机才可能成为现实。

第二节　数学发展简史

一、数学萌芽时期（远古—公元前 6 世纪）

远古人类的活动，从数数开始逐渐建立了自然数的概念，创造了简单的计算方法，认识了简单的几何图形，逐步地形成了数学。那时的数学是初步的、粗糙的，算术与几何也还没有区分。

从远古到公元前 5 世纪左右的数学萌芽时期是一个漫长的历史过程。人们积累了算术和几何方面的零碎知识，逐渐形成了抽象意义下的数和图形的概念，产生了计数法和各种数制下的算法，出现了测地术。此时尚未形成一般的数学理论，还谈不上有什么重要的数学思想。但是一一对应的计数法（对应思想）和记数符号的使用有力地推动了数学的发

展。另外，直接的观察和体验被作为最重要的认识方法。

刻痕记数是人类最早的数学活动，考古发现了3万年前的狼骨上的刻痕。古埃及的象形数字出现在约公元前3400年；巴比伦的楔形数字出现在约公元前2400年；中国的甲骨文出现在约公元前1600年。古埃及的纸草书和羊皮书及巴比伦的泥板文书记载了早期数学的内容，年代可以追溯到公元前2000年，其中甚至有“整勾股数”及二次方程求解的记录。

建于约公元前2900年的埃及法老胡夫的金字塔，塔基每边长约230米，塔基的正方程度与水平程度的平均误差不超过万分之一。中国西安半坡遗址反映的是公元前6000年的人类活动，那里出土的彩陶上有多种几何图形，包括平行线、三角形、圆、长方形、菱形等。中国最早的数学著作《周髀算经》成书在公元前200年，记载的是西周的数学，时间起于公元前1100年，含有勾股定理的表述。

这一时期又可以称为“数学起源与早期发展时期”，这是人类建立最基本的数学概念的时期。人类的起源需要一定的资源，河流的周边可以提供必要的生活条件，于是人类的起源常常跟河流相伴。所以，数学也主要起源于四个“河谷文明”地域，即非洲的尼罗河、西亚的底格里斯河与幼发拉底河、中南亚的印度河与恒河及东亚的黄河与长江。

数学萌芽时期的特点，是人们在实践中从现实世界里，零零星星地认识了数学中最古老、最原始的概念——“数”(自然数)和“形”(简单几何图形)。数的概念起源于数(读 shǔ)。原始社会人们采用“结绳记数”，就是把打猎所获得猎物与绳子的“结”进行比较，得出猎物的个数。从我国出土的甲骨文中发现，大约公元前14世纪至公元前11世纪的数字是采用十进位制记数法，最大数是3万。由此可见，数已从具体事物分离出来，抽象为“数”的概念，但仍然印上了十个手指数数的烙印。另一方面，人类还在采集果实、打造石器、烧土制陶的活动中，对各种物体加以比较，区分直曲方圆，逐渐形成了“形”的概念。我国出土的“仰韶文化”的彩陶中，就有由三角形和直线组成或由圆和曲线组成的图案。

数学经过漫长的萌芽时期，在古巴比伦、古埃及和古代中国积累了大量的数学知识之后，汇成了两股不同的数学源流，形成了两个各具特色、

风格各异的数学体系，一个是以古巴比伦和古埃及数学为源头的，在希腊汇合后又得到长足进步与发展的古希腊数学，另一个则是以解决问题为宗旨、以注重算法为特点的古代中国数学。

古希腊的数学融数学与哲学为一体，以哲学促进数学理论的建立，提出了一系列思辨性的数学观点、理论和方法。首先，古希腊人对数学的认识有了根本性的变化，他们认为数学不仅可用来解决一些实际问题，更重要的是他们试图用数学来理解世界，把数学看作是理解宇宙的一把钥匙，是研究自然的一部分，其深刻的数学思想对后世影响很大。其次，古希腊人用演绎证明方法研究几何，使几何学成为一个演绎系统。欧几里得的《几何原本》和阿波罗尼斯的《圆锥曲线》是演绎数学的代表著作。把逻辑证明系统地引入数学，把数学奠基于逻辑之上，这是对数学认识的一个质的飞跃，由此促进了数学思想方法的更新——公里化的思想和演绎推理进入了数学。值得一提的是，古希腊人虽然非常强调演绎推理，但数学思想发展的历史表明，他们的数学创造也离不开观察、实验，离不开归纳、猜想和分析。

中国古代数学是以问题为中心的算法体系，《九章算术》的成书是其形成的标志。

二、初等数学时期，即常量数学时期(公元前6世纪—公元17世纪中叶)

这个时期的特点，是人们将零星的数学知识进行了积累、归纳、系统化，采用逻辑演绎的方法形成了古典初等数学体系。数学萌芽时期人们认识的“数”和“形”，只是零星的数学知识，并未构成逻辑体系。到了公元前5世纪，古埃及由于尼罗河长期泛滥，冲毁了大片土地，这些区域需要重新丈量，由此积累了丰富的几何知识。后来古埃及人把几何知识传到古希腊，由欧几里得把人们长期实践发现、积累的几何知识，按照演绎的方法写成了《几何原本》。同一时期，人们为了解决实践中的一些实际应用问题，如研究天文历法中的问题，不断促使算术、代数的发展。数学从原始自然数、分数发展扩充到正负实数。成书于东汉时期的《九章算术》，就是人们在长期实践中，用数学解决实际问题的经验总结。

公元前 3 世纪至公元 2 世纪撰写成的《几何原本》和《九章算术》，标志着古典的初等数学体系的形成。

《几何原本》共 13 卷。全书主要以空间形式为研究对象，以逻辑思维为主线，从 5 条公设、23 个定义和 5 条公理推出了 467 条定理，从而建立了公理化演绎体系。《九章算术》则由 246 个数学问题、答案和术文组成。全书主要研究对象是数量关系。该书以直觉思维为主线，按算法分为方田、粟米、衰分、少广、商广、均输、盈不足、方程、勾股等九章，构成了以题解为中心的机械化算法体系。

三、变量数学时期(17 世纪中叶—19 世纪 20 年代)

这个时期的特点，是"运动"成为自然科学研究的中心课题。数学由研究现实世界的相对静止的事物或现象进而探索运动变化的规律。常量数学已发展到变量数学。16 世纪，欧洲社会萌芽了资本主义，手工业生产逐渐转向了机器工业生产，从而迫使自然科学对"运动"和各种"过程"的研究，进而产生了"变量"与"函数"的概念。

17 世纪上半叶，笛卡儿将几何内容的课题与代数形式的方法相结合，产生了解析几何学，这标志着变量数学时期的开始。17 世纪 60 年代，牛顿和莱布尼兹各自从运动学和几何学研究的需要，创建了微积分。随后，相继建立了级数理论、微分方程论、变分学等分析学领域的各个分支。15—18 世纪，人们还研究了大量的随机现象，发现存在着某种完全不确定规律性，从而开辟了或然数学的新领域，建立了概率论。

这个时期，数学的研究对象已由常量进入变量，由有限进入无限，由确定性进入非确定性；数学研究的基本方法也由传统的几何演绎方法转变为算术、代数的分析方法。

马克思主义奠基人之一的恩格斯，在考察了 18 世纪前整个数学发展历史的基础上，指出："数和形的概念不是从任何地方得来的，而仅仅是从现实世界中得来的。""纯数学是以现实世界的空间形式和数量关系——这是非常现实的材料——为对象的。"这些论断揭示了科学的数学本质。

四、近代数学时期(19 世纪 20 年代至第二次世界大战)

这个时期的特点，是数学由研究现实世界的一般抽象形式和关系，进

入到研究更抽象、更一般的形式和关系,数学各分支互相渗透融合。随着计算机的出现和日益普及,数学愈来愈显示出科学和技术的双重品质。19世纪以来,由于社会发展的需要,以及数学自身的逻辑矛盾不断产生许多新问题,促使处于数学核心部分的几个主要分支——代数、几何、分析学的内容发生了深刻变化,并产生了许多新的数学分支,由寻求一元 n 次方程的解而建立了群论,创建了抽象代数学。代数学已由研究具体的数和用字母代表的任意数,以及它们之间的运算,发展到研究各种代数系统的结构和更一般的运算:同构、同态、反演、映射等。由试证欧氏几何的第五公设开创了非欧几何学。非欧几何的发现拓广了空间概念,欧氏空间再不是描述现实世界唯一可能的空间,除此之外还有 n 维空间、无穷维空间以至于更抽象的空间。由研究分析学的基础创建了"集合论",建立了抽象分析学和数理逻辑。数学分析最基础的概念是函数、极限、连续、导数(微分)和积分,分析的精确化(严密化),是由柯西(Cauchy)给极限概念下严密定义而开始的,最后由戴德金(Dedekind)和康托尔(Cantor)等人相继完成了连续的理论,才为数学分析的精确化奠定了坚实的基础。由此建立的康托尔集合论,对数学发展的影响极其深远。此外,施瓦兹(Schwartz)等人对经典函数概念进行了拓广,提出并系统发展了广义函数论。其中泛函分析就是在抽象代数的新方法、几何空间概念的拓广以及分析精确化工作等方面的影响下,建立起来的一门新学科。泛函分析可以看作无限维空间的解析几何和数学分析,它研究的对象不再是某个具体的函数,而是具有某种特征和关系的"函数空间"。

五、现代数学时期(20世纪40年代以来)

从时间上来看,这个时期从公元19世纪末以后,通常称为现代数学时期,其中主要是20世纪。这个时期,数学发展的特点是,由研究现实世界的一般抽象形式和关系,进入到研究更抽象、更一般的形式和关系,数学各分支互相渗透融合。随着计算机的出现和日益普及,数学越来越显示出科学和技术的双重品质。

20世纪以来,数学的发展更是迅猛异常,产生了"优选学"、"规划论"、"对策论"、"排队论"、"计算机理论"等等。尤其是第二次世界大战以

后，由于科学技术和工程技术上的计算问题越来越复杂，需要高速、准确地计算许多非线性的、多维的，或为方程组形式的数学问题，为此电子计算机应运而生。随着计算机的出现，与高新科技紧密相关的数学理论，如控制论、突变论、拓扑稳定性和大范围分析等理论也随之产生。今日的数学不仅是一门独立的科学，而且是一种普遍性的技术，它“兼有科学和技术的两种品质”。

显然，现代数学的许多分支的研究对象，远远突破了传统的“空间形式”和“数量关系”的范围。如果我们对“空间形式”和“数量关系”作更广义的理解，如“空间形式”并非只有二维和三维欧氏空间，还有 n 维欧氏空间、Lobachevsky 空间、拓扑空间等；“数量关系”也扩展到向量、张量等，恩格斯关于数学本质的科学论断依然是恰当的。事实上，数学发展至今，“数学研究的对象不能只限于我们直接经验到的数量关系与空间形式，而必须包括越来越多的‘人类悟性的自由创造物’。”正如数学家丁石孙所说：“数学的研究对象是客观世界的逻辑可能的数量关系和结构关系。”如各种代数结构、拓扑结构，以及同态、同调等各种关系，甚至转换、映照等，这些都成为当今数学所研究的纯粹的“量”。

必须指出，数学研究的对象似乎抽象成了“远离实际的东西”，但是许许多多抽象出的数学对象与现实世界仍然有着密切的联系。例如，复数诞生之时就起了一个“虚幻”的名字——虚数，可是它在电学、空气动力学中却有广泛的应用；又如，Galois 群论，在被人们搁置了数十年之后，却在晶体学中找到了应用。再如，我国的概率论专家王梓坤，利用概率统计的理论创造了“随机转移”、“相关区”等数学方法，成功地预报了 1976 年四川松潘大地震。

数学的发展并不是一些新概念、新命题、新方法的简单积累，它包含着数学本身许多根本的变化，也即质的飞跃。历史上发生的数学思想方法的几次重大突破，就充分说明了这一点。

第三节　数学发展史上的几次重大突破

一、从算术到代数

算术和代数是数学中最基础而又最古老的分支学科，两者有着密切的联系。算术是代数的基础，代数由算术演进而来。从算术演进到代数，是数学在思想方法上发生的一次重大突破。

1. 代数学产生的历史必然性

代数学作为数学的一个研究领域，其最初而又最基础的分支是初等代数。初等代数研究的对象是代数式的运算和方程的求解。从历史上看，初等代数是算术发展的继续和推广，算术自身运动的矛盾以及社会实践发展的需要，为初等代数的产生提供了前提和基础。

我们知道，算术的主要内容是自然数、分数和小数的性质与四则运算。算术的产生，表明人类在现实世界数量关系认识上迈出了具有决定性意义的第一步。算术是人类社会实践活动中不可缺少的数学工具，在人类社会各部门都有广泛而重要的应用，离开算术这一数学工具，科学技术的进步几乎难以想象。

在算术的发展过程中，由于算术理论和实践发展的要求而提出了许多新问题，其中一个重要问题就是算术解题法的局限性在很大程度上限制了数学的应用范围。

算术解题法的局限性，主要表现在它只限于对具体的、已知的数进行运算，不允许有抽象的、未知的数参加运算。也就是说，利用算术解应用题时，首先要围绕所求的数量，收集和整理各种已知的数据，并依据问题的条件列出关于这些具体数据的算式，然后通过加、减、乘、除四则运算求出算式的结果。许多古老的数学应用问题，如行程问题、工程问题、流水问题、分配问题、盈亏问题等，都是借助这种方法求解的。算术解题法的关键是正确地列出算术，即通过加、减、乘、除符号把有关的已知数据连接

起来，建立能够反映实际问题本质特征的数学模型。对于那些只具有简单数量关系的实际问题，列出相应的算式并不难，但对于那些具有复杂数量关系的实际问题，列出相应的算式往往就不是一件容易的事了，有时需要很高的技巧才行。特别是对于那些含有几个未知数的实际问题，要想通过建立已知数的算式来求解，有时甚至是不可能的。

算式自身运算的局限性，不仅限制了数学的应用，而且也影响和束缚了数学自身的继续发展。随着数学自身和社会实践的深入发展，算术解题法的局限性日益暴露出来，于是一种新的解题法——代数解题法的产生也就成为历史的必然。

代数解题法的基本思想是，首先依据问题的条件组成包含已知数和未知数的代数式，并按等量关系列出方程，然后通过对方程进行恒等变换求出未知数的值。初等代数的中心内容是解方程，因而通常把初等代数理解为解方程的科学。

初等代数与算术的根本区别，在于前者允许把未知数作为运算的对象，后者则把未知数排斥在运算之外。如果说在算术中也论及某个未知数的话，那么，这个未知数也只能起运算结果符号等价物的作用，只能单独地处在等式的左边，在算术中，未知数没有参加运算的权利。而在代数中，方程作为由已知数构成的条件等式，本身就意味着其中所包含的已知数和未知数有着同等的运算地位，即未知数也变成了运算的对象，和已知数一样，它们可以参与各种运算，并可以依照某种法则从乘式的一边移到另一边。解方程的过程，实质上就是通过对已知数和未知数的重新组合，把未知数转化为已知数的过程，即把未知数置于等式的一边，已知数置于等式的另一边。从这种意义上看，算术运算不过是代数运算的特殊情况，代数运算是算术运算的发展和推广。

由于代数运算具有较大的普遍性和灵活性，因而代数的产生极大地扩展了数学的应用范围，许多算术无能为力的问题，在代数中却能轻而易举地得到解决。不仅如此，代数学的产生对整个数学的进展产生了巨大而深远的影响，许多重大发现都与代数的思想方法有关。例如，对二次方程的求解，导致虚数的发现；对五次以上方程的求解，导致群论的诞生；把代数应用于几何问题，导致解析几何的创立等等。正因为如此，我们把代

数的产生作为数学思想方法发生第一次重大转折的标志。

2. 代数学体系结构的形成

“代数”一词，原意是指“解方程的科学”。因此，最初的代数学也就是初等代数。初等代数作为一门独立的数学分支学科，其形成经历了一个漫长的历史过程，我们很难以某一个具体的年代作为它问世的标志。从历史上看，它大体上经历了三个不同的阶段：文词代数，即用文字语言来表达运算对象和过程；简字代数，即用简化了的文词来表示运算内容和步骤；符号代数，即普遍使用抽象的字母符号。从文词代数演进到符号代数的过程，也就是初等代数由不成熟到较为成熟的发展过程。在这个过程中，17 世纪法国数学家笛卡儿做出了突出的贡献，他是第一个提倡用 x，y，z 代表未知数的人，他提出和使用的许多符号，同现代的写法基本一致。

随着数学的发展和社会实践的深化，代数学的研究对象不断得到扩大，其思想方法不断得到创新，代数学也就由低级形态演进到高级形态，由初等代数发展到高等代数。高等代数有着丰富的内容和众多的分支学科，其中最基本的分支学科有如下几个：

线性代数：讨论线性方程（一次方程）的代数部分，其重要工具是行列式和矩阵。

多项式代数：主要借助多项式的性质来讨论代数方程的根的计算和分布，包括整除性理论、最大公因式、因式分解定理、重因式等内容。

群论：研究群的性质的代数学分支学科，属于抽象代数的一个领域。群是带有一种运算的抽象代数系统。群的概念是 19 世纪初由法国青年数学家伽罗华最先提出的，伽罗华由此成为群论的创立者。群论发展到现在，已经获得丰富的内容和广泛的应用。

环论：研究环的性质的代数学分支学科，是正在发展着的一个抽象代数领域。环是带有两种运算的抽象代数系统，有许多独特的性质。一种特殊的环称为域，如果域的元素是数，则称为数域。以域的概念为基础，形成了抽象代数学的另一个领域——域论。

布尔代数：也称二值代数、逻辑代数或开关代数，是带有三种运算的抽象代数系统。由英国数学家布尔于 19 世纪 40 年代创立。近几十年

来，布尔代数在线路设计、自动化系统和电子计算机设计方面得到广泛应用。

此外，还有格论、李代数和同调代数等分支学科。

高等代数与初等代数在思想方法上有很大的差别。初等代数属于计算性的，并且只限于研究实数和复数等特定的数系，而高等代数是概念性、公理化的，它的对象是一般的抽象代数系统。因此，高等代数比初等代数具有更高的抽象性和更大的普遍性，这就使高等代数的应用范围更加广泛。向抽象性和普遍性方向发展，是现代代数学的一个重要特征。

二、从综合几何到几何代数化

几何学和代数学一样，也是数学中最基础、最古老的分支学科之一。几何学经过漫长的历史发展，其思想方法发生了一系列重大的变革。在这些变革中，起决定性的第一重大变革，则是从综合几何到几何代数化的历史演进。

1. 几何代数化思想的由来

数学的发展是以数和形两个基本概念作为主干的，数学思想方法的各种变革也是通过这两个概念进行的。在数学的萌芽时期，数和形的研究并不是互相割裂的，长度、面积和体积的度量把数和形紧密地联系起来。可是，在尔后的数学发展中，数和形的联系却长期没能得到进一步的深化，这突出表现在几何和代数的不协调性发展上。

我们知道，几何学作为一门独立的数学学科，最先是在古希腊学者手中形成的，欧几里得《几何原本》的问世就是重要的标志。那时，代数尚处于潜科学阶段，尚未形成严谨的逻辑体系，只是以零散、片断的知识形态存在着。因此，从公元前 3 世纪到公元 14 世纪，几何学在数学中占据着主导地位，而代数则处于从属的地位。由于几何学有着严谨的推理方法和直观的图形，可以把种种空间性质、图形关系问题的探讨，归结成一系列基本概念和基本命题来推演、论证，所以数学家们大多喜欢运用几何思维方式来处理数学问题，甚至把代数看成是与几何不相干的学科。这种人为的割裂，不仅延误了代数的发展，也影响了几何学的进步。

随着数学研究范围的扩大，用几何方法来解决数学问题越来越困难，

因为许多问题特别是证明问题往往需要高超的技巧才能奏效，而且推演、论证的步骤又显得相当繁难，缺乏一般性方法。正当几何学难于深入进展时，代数学却日趋成熟起来，尤其是在16世纪代数学得到突破性进展，不仅形成了一整套简明的字母符号，而且成功地解决了二次、三次、四次方程的求根问题。这就使代数学在数学中的地位逐渐得到上升，于是综合几何思维占统治地位的局面开始被打破。

历史上最先明确认识到代数力量的是16世纪法国数学家韦达，他尝试用代数方法来解决几何作图问题，并隐约出现了用方程表示曲线的思想。他指出，几何作图中线段的加减乘除可以通过代数的术语表出，所以它们实质上属于代数的运算。随着代数方法向几何学的渗透，代数方法的普遍性优点日益表露出来，于是用代数方法来改造传统的综合几何思维，把代数和几何有机结合起来，互相取长补短，便十分必要了。

实现代数与几何有机结合的关键，在于空间几何结构的数量化，即把形与数统一起来。这一项工作是由法国数学家笛卡儿完成的。笛卡儿继承和发展了韦达等人的先进数学思想，他充分看到代数思想的灵活性和方法的普遍性，为寻求一种能够把代数全面应用到几何中去的新方法思考了20多年。1619年，他悟出建立新方法的关键，在于借助坐标系建立起平面上的点和数对之间的对应关系，由此可用方程来表示曲线。1637年，他的《几何学》作为《方法论》一书的附录出版，在这个附录中，他明确提出了坐标几何的思想，并用于解决许多几何问题。此书的问世，标志着解析几何的诞生。与笛卡儿同一时代、同一国度的另一位数学家费尔马，也几乎同时独立地发现了解析几何的基本原理，他的思想集中体现在他的《轨迹引论》一书中。

解析几何的出现开创了几何代数化的新时代，它借助坐标实现了空间几何结构的数量化，由此把形与数、几何与代数统一起来。而坐标本身就是几何代数化的产物，是点与数的统一体，它既是点的位置的数量关系表现，又是数量关系的几何直观，因此它具有形与数的二重性。有了坐标概念，就可以把空间形式的研究转化为数量关系的研究了。

例如，求两点间的距离，如果给定两点的坐标(x_1, y_1)和(x_2, y_2)，则其距离就表示为一个代数式$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$，于是几何学上两

点之间的测量问题就转化成代数上求一个代数式的值的问题。

再如，求两条曲线的交点，这是几何学中比较困难的一个问题，如果两条曲线的方程给定，那么通过解联立方程组就可求出交点的位置，因为方程组的解恰是这两条曲线交点的坐标。

随着解析几何的发展，几何代数的内容和方法不断得到丰富。1704年，牛顿运用坐标方法研究了三次曲线；1748年，欧拉在《分析引论》一书中全面而系统地论述了平面解析几何的理论；1788年，拉格朗日又把力、速度和加速度给予了算术化，由此开创了解析几何中的向量理论研究方向。与此同时，坐标概念本身也在不断地丰富，除直角坐标系外，又相继产生了斜坐标、极坐标、柱坐标和球坐标。坐标系也从二维扩展到三维以及多维和无穷维，从而又出现了多维解析几何和无穷维解析几何。由此又导致了代数几何和泛函分析的产生。

2. 几何代数化的意义

几何代数化对于数学的发展有着重要的意义，这里仅就几个方面加以分析。

(1)把几何学推到一个新的阶段

几何代数化不仅为几何学提供了新方法，使许多难以解决的几何问题变得简单易解，更重要的是为几何学的发展注入了新的活力，增添了崭新的内容。

首先，传统几何学逻辑基础主要是推理，基本上是定性研究，如直线的平行线、曲线的相交、图形的全等等。几何代数化的出现，使得图形性质的研究变成方程的讨论和求解，而方程的研究又主要是数量上的分析，这就把几何学从定性研究阶段推到定量分析阶段。

其次，在传统几何学中，空间概念是在人们的社会实践活动中逐渐抽象和确立起来的，这种空间概念具有明显的直观性和经验性，如一维的直线、二维的平面和三维的立体。几何代数化的出现，使得空间的几何结构实现了数量化，而数量化了的空间几何结构已不再局限于一维、二维和三维，它可以是 n 维以至无穷维的，这就把几何学的空间概念从低维扩张到了高维，即把几何学研究的内容从现实空间图形的性质扩展到抽象空间图形的性质。

第三，传统几何学主要研究固定不变的图形，如各种各样的直线形和曲线形，这些图形虽然可以移动和相互变换，但图形本身的结构却是“死”的，即传统几何学是一种静态几何学。几何代数化的出现，即可把曲线看作是由“点”通过运动而生成的，这就使人们对形的认识由静态发展到了动态。

(2)为代数学研究提供了新的工具

几何代数化不仅直接影响和改造了传统的几何学，扩大了几何学的研究对象，丰富和发展了几何学的思想方法，而且也使代数学获得了新的生命力。

首先，几何学的概念和术语进入代数学，使许多代数课题具有了直观性。我们知道，和几何学相比，代数学具有更高的抽象性，许多抽象的代数式和方程使人难以把握它们的现实意义。几何代数化的出现，为抽象的代数式和方程提供了形象而直观的模型，如可把方程的解看作是曲线的交点的坐标，可把二次方程根与系数关系的研究转化为考察和分析圆锥曲线与坐标轴的相对位置。

其次，几何学思想方法向代数学的移植和渗透，开拓了代数学新的研究领域，如以线性方程(一次方程)为主要对象的线性代数，就是在线性空间概念的基础上构造起来的，这里的“线性”、“空间”等概念并不是代数学本身所固有的，而是从几何学中借用的。

(3)为微积分的创立准备了必要条件

几何代数化思想形成的标志是解析几何的创立，笛卡儿在创立解析几何过程中，不仅提出了代数与几何相结合的思想，而且把变数引进了数学。变数的引进，对于数学的发展有着极为重要的意义，特别是为微积分的创立准备了重要工具，加速了微积分形成的历史进程。从这种意义上看，可把解析几何的产生看作是微积分创立的前奏。

(4)为数学的机械化证明提供了重要启示

定理的机械化证明，是现代数学新兴的一个研究领域，从机械化算法上看，它的方法论基础是利用代数方法把推理程序机械化。因此，定理机械化证明的思想渊源可追溯到几何的代数化。

此外，几何代数化的思想还给数学研究从方法论上提供了许多重要

启示，如数学家们把点与数对、曲线与方程相对应的思想加以发展，提出了函数与点、函数集与空间相对应的思想，在此基础上进而创立了泛函分析这一新的理论。

三、从常量数学到变量数学

数学发展的第三个时期，是变量数学时期。从 17 世纪开始，变量数学逐渐登上历史舞台。变量数学时期大致从 17 世纪中叶到 19 世纪 20 年代，这一时期数学的特征在于研究变数以及变数之间的关系。对此，恩格斯曾作出如下清楚的刻画：

17 世纪对于数学发展具有重大意义的事件，除了解析几何开辟了几何代数化这一新的方向外，还有微积分的创立使常量数学过渡到变量数学。从常量数学到变量数学，是数学思想方法的又一次重大突破。

1. 变量数学产生的历史背景

恩格斯曾高度评价："数学中的转折点是笛卡儿的变数，有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了，而它们也就立刻产生，并且是由牛顿（Newton，1643—1727）和莱布尼兹（Leibniz，1646—1716）大体上完成的，但不是由他们发明的。"

这一时期的主要成果，一是笛卡儿引进了变数，并开始用代数方法解决几何问题，建立了解析几何；二是莱布尼兹给出了一般的函数概念；三是牛顿和莱布尼兹创立了微积分学的原理。他们和他们的学生发展了数学分析的工具，成为解决力学与流体力学、天文学与光学问题的重要武器，哈雷彗星在 1759 年回归的预言是数学分析方法的胜利。此外，从 18 世纪到 19 世纪这 100 年间，还研究了偏微分方程，创立了变分学，并且产生和发展了概率论。数学发展进入了崭新的黄金时代。

变量数学是相对常量数学而言的数学领域。常量数学的对象主要是固定不变的图形和数量，它包括算术、初等代数、初等几何和三角等分支学科。常量数学是描述静态事物的有力工具，可是，对于描述事物的运动和变化却是无能为力的。因此，从常量数学发展到变量数学，就成为历史的必然了。

变量数学之所以产生于17世纪，是有其特定的历史背景的。

从自然科学的发展来看，变量数学是在回答十六七世纪自然科学提出的大量数学问题过程中酝酿和创立起来的。我们知道，随着欧洲封建社会的解体和资本主义工厂手工业向机器大生产的过渡，自然科学开始从神学的桎梏下解放出来，大踏步地前进。这时，社会生产和自然科学向数学提出了一系列与运动变化有关的新问题。这些新问题，大体可以分为以下五种类型：

第一类问题是描述非匀速运动物体的轨迹。如行星绕日运动的轨迹、各种抛射物体的运动轨迹。

第二类问题是求变速运动物体的速度、加速度和路程。如已知变速运动物体在某段时间内经过的路程，求物体在任意时刻的速度和加速度，或反过来由速度求路程。

第三类问题是求曲线上任一点的切线。如光线在曲面上的反射角问题，运动物体在其轨迹上任一点的运动方向问题。

第四类问题是求变量的值。如斜抛物体的最大水平距离问题，行星绕日运动的近日点和远日点问题。

第五类问题是计算曲线长度、曲边形面积、曲面体体积、物体的重心以及大质量物体之间的引力等。

上述各类问题尽管内容和提法不同，但从思想方法上看，它们有一个共同的特征，就是要求研究变量及其相互关系。这是十六七世纪数学研究的中心课题，正是对这个中心课题的深入研究，最终导致了变量数学的产生。

从数学的发展来看，变量数学的基础理论——微积分，早在微积分诞生之前的2000多年，就已经有了它的思想萌芽。

公元前5世纪，希腊学者德谟克利特为解决不可公度问题，创立起数学的原子论。它的基本思想是：直线可分为若干小线段，小线段又可再分更小的线段，直至成为点而不可再分，故称点为直线的数学原子即不可分量。平面图形同样可以如此分下去，使得线段成为平面图形的数学原子。利用数学原子概念，德谟克利特求得锥体的体积等于等底等高柱体的三分之一。

公元前 4 世纪，希腊学者欧道克斯在前人工作的基础上，创立起求曲边形面积和曲面体体积的一般方法——穷竭法。运用此法，他成功地证明了"圆面积与直径的平方成正比例"和"球体积与其直径的立方成比例"等命题。

微积分的早期先驱者主要是阿基米德，他继承和发展了穷竭法，并应用这一方法解决了诸如抛物线弓形等许多复杂的曲边形面积。继阿基米德之后，微积分的思想方法逐渐成熟起来，其中作出重大贡献的有开普勒、伽利略、卡瓦列利、华利斯、笛卡儿、费尔马和巴罗等人。巴罗甚至接触到了微积分的基本原理——微分和积分的互逆关系。

总之，变量数学的产生不仅有其特定的生产和自然科学背景，而且也是数学自身矛盾运动的必然结果。它是经过相当长时间的酝酿，在十六七世纪生产和自然科学需要的刺激下，经过许多人的努力而准备好由"潜"到"显"过渡的条件的。

2. 变量数学的创始及其意义

变量数学由"潜"到"显"的过渡经历了两个具有决定性的重大步骤：一是解析几何的产生，二是微积分的创立。前者为变量数学的创始提供了直接的前提，后者是变量数学创始的主要标志。

微积分的主要创始人是牛顿和莱布尼兹。他们最大的功绩是明确地提出了微分法和积分法，并把两者有机结合起来，建立了微积分的基本原理（牛顿-莱布尼兹公式）。

牛顿主要是从运动学来研究和建立微积分的。他的微积分思想最早出现在 1665 年 5 月 20 日的一页文件中，这一天可作为微积分诞生的日子。他称连续的变量为"流动量"，用符号 x,y,z 等字母表示，称它们的导数为"流数"，用加小点的字母来表示，如 $\dot{x},\dot{y},\dot{z}$ 等，称微分为"瞬"。

莱布尼兹是从几何学的角度创立微积分的。他的微积分思想最先出现在 1675 年的手稿之中，他所发明的微积分符号，远远优于牛顿的符号，对微积分后来的发展有重大的影响。现今通用的符号 dx、dy、$\int$ 等，就是莱布尼兹当年精心选择和创设的。

继牛顿和莱布尼兹之后，18 世纪对微积分的创立和发展作出卓越贡献的有欧拉、伯努利家族、泰勒、马克劳林、达朗贝尔、拉格朗日等人。十

七八世纪的数学，几乎让微积分占据了主导地位，绝大部分的数学家都被这一新兴的学科所吸引，可见微积分产生意义之重大。

变量数学创始的两个决定性步骤都是在17世纪完成的，因此17世纪也就成了常量数学向变量数学转变的时期。变量数学的产生，是数学史乃至整个科学史上的一件大事。变量数学来自于生产技术、自然科学发展的需要以及数学自身的矛盾运动，又回过头来对生产技术、自然科学以及数学自身的发展产生巨大而深远的影响。

首先，变量数学的产生，为自然科学描述现实世界的各种运动和变化提供了有效的工具。我们知道，在现实世界中“静”和“不变”总是暂时的、相对的，“动”和“变”则是永恒的、绝对的。“整个自然界，从最小的东西到最大的东西，从沙粒到太阳，从原生生物到人，都处于永恒的产生和消灭中，处于不断的流动中，处于无休止的运动和变化中。”可见，自然科学研究的对象是运动变化着的物质世界，变量数学的产生，为自然科学精确地描述物质世界的运动、变化规律提供了不可缺少的工具。变量数学对于现代生产技术、自然科学的发展，就如望远镜对于天文学、显微镜对于生物学的发展一样重要。假设没有变量数学，现代物质文明建设将是不可想象的事。

其次，变量数学的产生，带来了数学自身的巨大进步。变量数学是从常量数学发展的基础上出现的，它的产生又反过来深深影响了常量数学的发展，特别是常量数学的各个分支学科由于变量数学的渗透而在内容上得到极大的丰富，在思想方法上发生一连串深刻的变革，并由此产生出许多新的分支学科。解析数论和微分几何等分支学科，就是变量数学的思想方法向传统数论和传统几何渗透的产物。就变量数学本身而言，由于它在生产技术和自然科学中有着广泛的应用，所以它一产生出来就得到蓬勃而迅速的发展，并由此相继派生出许多新的分支学科，逐渐形成一个庞大的体系，如级数论、常微分方程论、偏微分方程论、差分学、复变函数论、实变函数论、积分方程、泛函分析等。总之，变量数学无论从内容、思想方法上，还是从应用的范围上，很快就在整个数学中占据了主导地位，长期以来一直规定和影响着近、现代数学发展的方向。

此外，变量数学的产生还有着深远的哲学意义。众所周知，变量数学

的许多基本概念，诸如变量、函数、导数和微分，以及微分法和积分法，从哲学上看，不外是辩证法在数学中的运用，而且是辩证法在数学中取得的一次根本性胜利。正因为如此，马克思和恩格斯十分重视微积分概念和运算的历史演变，并对其进行了深刻而精辟的哲学分析。马克思在他的《数学手稿》中，运用唯物辩证法的基本观点，详细考察了微积分思想的历史演变过程，深刻揭示了微分概念和运算的辩证实质，还总结分析了不同学术观点的论争对于微分学发展的积极作用。恩格斯在他的《自然辩证法》一书中，阐述了微积分产生的重大意义，指出："在一切理论成就中，未必再有什么像17世纪下半叶微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利了。"他还针对微积分概念的"神秘性"，给出了微积分概念直观的现实原型，指出："自然界运用这些微分即分子时所使用的方式和所依据的规律，完全和数学运用其抽象的微分时的方式和规律相同。"由此可见，变量数学的产生使数学更加成为"辩证的辅助工具和表现方式"，又一次为辩证法的普适性从数学上提供了生动而有力的例证。

四、从必然数学到或然数学

在现实世界中存在着两类性质截然不同的现象：一类是必然现象，另一类是或然现象。描述和研究必然现象的量及其关系的数学部分，称为必然数学；描述和研究或然现象的量及其关系的数学部分，称为或然数学。从必然数学到或然数学，是数学研究对象的一次显著扩张，也是数学思想方法的又一次重大突破。

1. 或然数学产生的现实基础

或然数学的对象是或然现象。所谓或然现象，是指这样的一类现象：它在一定条件下可能会引起某种结果，也可能不引起这种结果。也就是说，在或然现象中，条件和结果之间不存在必然性的联系。例如，投掷一枚硬币，可能出现正面，也可能出现反面。

与或然现象不同，在必然现象中，只要条件具备，某种结果就一定会发生，即条件和结果之间存在着必然性联系。因此，对于必然现象，可由条件预知结果如何。这一点正是必然数学的现实基础。例如，当我们用微分方程定量描述某些必然现象的运动和变化过程时，只要建立起相应

的微分方程式，并给定问题的初始条件，就可以通过求解微分方程预知未来某时刻这种现象的状态。19 世纪英国天文学家亚当斯借助微分方程预言海王星的存在及其在天空中的位置，就是典型的一例。

由于或然现象的条件和结果之间不存在必然性的联系，因此无法用必然数学来加以精确的定量描述。例如，投掷一枚质量均匀的硬币，要想预先准确计算出它一定会出现正面或一定会出现反面，是不可能的。但是，这并不意味着或然现象不存在着数量规律，也不意味着不能从量上来描述和研究或然现象的规律。

从表面上看，或然现象是杂乱无章的，无任何规律可谈，但如果仔细考察，就会发现当同类的或然现象大量重复出现时，它在总体上将会呈现出某种规律性。

例如，一个充有大量气体分子的容器，就单个分子而言，它的运动速度和方向带有明显的或然性，每个分子对器壁的压力大小也具有或然性，因而难以对“速度”、“压力”作一定量分析。然而，实践却表明，就全体分子对器壁的压力而言，器壁所受的总压力却是一个确定的值，即大量气体分子的运动在总体上呈现出一种规律性。同样，当多次重复地投掷一枚质量均匀的硬币时，将会发现出现正面的次数与总投掷次数之比总是在$\frac{1}{2}$左右摆动，而且随着投掷次数的增加，这个比越来越接近$\frac{1}{2}$。

大量同类或然现象所呈现出来的集体规律，叫作统计规律性。这种统计规律性的存在，就是或然数学的现实基础。

统计规律性是基于大量或然现象而言的。这里的“大量”包含两层意思：其一是某一或然现象在相同的条件下多次甚至无限地重复出现，如多次投掷硬币、连续发射炮弹、连日观测气温等。其二是众多的同类或然现象同时发生，如容器内的气体分子、电子束中的电子、小麦的催芽实验等。

由于统计规律是一种宏观的、总体性的规律，不同于单个事物或现象表现出那种“微观性”的规律，因此或然数学在研究方法上有其自身的特殊性。统计方法就是它的一种基本研究方法。统计方法的基本思想是：从一组样本分析、判断整个对象系统的性质和特征。统计方法的逻辑依据是“由局部到整体”、“由特殊到一般”，是归纳推理在数学上的一种具体应用。

2. 或然数学的产生和发展

概率论是或然数学的基础理论，也是历史上最先出现的或然数学的分支学科。它的创立可作为或然数学产生的标志。

概率论创立于17世纪，但它的思想萌芽至少可追溯到16世纪。在自然界和社会生活中存在着各种各样的或然现象，但最先引起数学家们注意的则是赌博中的问题。16世纪意大利数学家卡当曾计算过掷两颗或三颗骰子时，在所有可能方法中有多少种方法能得到某一预想的总点数。他的研究成果集中体现在他的《论赌博》一书中。由于赌博中的概率问题最为典型，因此，从这类问题着手研究或然现象的数量规律，便成为当时数学研究的一个重要课题。

促使概率论产生的直接动力是社会保险事业的需要。17世纪资本主义工业与商业的兴起和发展，使社会保险事业应运而生。这就激发了数学家们研究概率问题的兴趣，因为保险公司需要计算各种意外事件发生的概率，如火灾、水灾和死亡等。由于概率论的思想与方法在保险理论、人口统计、射击理论、财政预算、产品检验以及医学、物理学和天文学中有着广泛的应用，因此，它很快就成为许多数学家认真探讨的一个研究领域。作为数学的一个分支学科，它是经17世纪许多数学家之手创立起来的，其中作出突出贡献的有帕斯卡、费尔马、惠更斯和雅各·伯努利等人。

概率论的许多重要定理是在18世纪提出和建立起来的。例如，美佛在他的《机会的学问》一书中，提出了著名的“美佛-拉普拉斯中心极限定理”的一种特殊情况。拉普拉斯提出了这一定理的一般情况，他撰写的两部著作《分析概率论》和《概率的哲学探讨》，具有重要的理论和应用价值。蒲丰在其《或然算术实验》一书中，提出了有名的“蒲丰问题”，对这一问题的研究，后来导致了著名的蒙特卡洛方法的产生。高斯和泊松也对概率论作出了重要贡献，高斯奠定了最小二乘法和误差理论的基础，泊松提出了一种重要的概率分布——泊松分布。

从19世纪末开始，随着生产和科学技术中的概率问题的大量出现，概率论得到迅速发展，并不断地派生出一系列新的分支理论。俄国的马尔科夫过程论，在原子物理、理论物理、化学和公共事业等方面有着广泛

的应用。此外，还有平稳随机过程论、随机微分方程论、多元分析、试验分析、概率逻辑、数理统计、统计物理学、统计生物学、统计医学等等。目前，或然数学已成为具有众多分支的庞大数学部门，它仍处于发展之中，它的理论和方法在科学技术、工农业生产、国防和国民经济各部门日益得到更加广泛的应用。

五、从明晰数学到模糊数学

20 世纪 60 年代，随着现代科学技术的发展，数学领域又产生出了一支新秀——模糊数学。模糊数学无论在研究对象还是在思想方法上，都与已有的数学有着质的不同。它的产生不仅极大地拓展了数学的研究范围，而且带来了数学思想方法的一次重大突破。

1. 模糊数学产生的背景

模糊数学是在特定的历史背景中产生的，它是数学适应现代科学技术需要的产物。

首先，现实世界中存在着大量模糊的量，对这类量的描述和研究需要一种新的数学工具。我们知道，现实世界中的量是多种多样的，如果按着界限是否分明，可把这无限多样的量分为两类：一类是明晰的，另一类是模糊的。实践表明，在自然界、生产、科学技术以及生活中，模糊的量是普遍存在的，例如“高压”、“低温”、“偏上”、“适度”、“附近”、“美丽”、“温和”、“老年”、“健康”等等。这些概念作为现实世界事物和现象的状态反映，在量上是没有明晰界限的。

模糊数学产生之前的数学，只能精确地描述和研究那些界限分明的量，即明晰的量，把它们用于描述和研究模糊的量就失效了。对那些模糊的量，只有用一种“模糊”的方法去描述和处理，才能使结果符合实际。因此，随着社会实践的深化和科学技术的发展，对“模糊”数学方法进行研究也就十分必要了。

其次，电子计算机的发展为模糊数学的诞生准备了摇篮。自 20 世纪 40 年代电子计算机问世以来，电子计算机在生产、科学技术各领域的应用日益广泛。电子计算机发展的一个重要方向是模拟人脑的思维，以便能处理生物系统、航天系统以及各种复杂的社会系统。而人脑本身就是

一种极其复杂的系统。人脑中的思维活动之所以具有高度的灵活性，能够应付复杂多变的环境，一个重要的原因是逻辑思维和非逻辑思维同时在起作用。一般说来，逻辑思维活动可用明晰数学来描述和刻画，而非逻辑思维活动却具有很大的模糊性，无法用明晰数学来描述和刻画。因此，以二值逻辑为理论基础的电子计算机，也就无法真实地模拟人脑的思维活动，自然也就不具备人脑处理复杂问题的能力。这对电子计算机特别是人工智能的发展，无疑是一个极大的障碍。为了把人的自然语言算法化并编入程序，让电子计算机能够描述和处理那些具有模糊量的事物，从而完成更为复杂的工作，就必须建立起一种能够描述和处理模糊的量及其关系的数学理论。这就是模糊数学产生的直接背景。

模糊数学的创立者是美国加利福尼亚大学的札德教授。为了改进和提高电子计算机的处理能力，他认真研究了传统数学的基础——集合论。他认为，要想从根本上解决电子计算机发展与数学工具局限性的矛盾，必须建立起一种新的集合理论。1966 年，他发表了题为《模糊集合》的论文，由此开拓出了模糊数学这一新的数学领域。

2. 模糊数学的理论基础

明晰数学的理论基础是普通集合论，模糊数学的理论基础则是模糊集合论。札德也正是从模糊集合论着手，建立起模糊数学的。

模糊集合论与普通集合论的根本区别，在于两者赖以存在的基本理论——集合的意义不同。普通集合论的基本概念是普通集合即明晰集合。对于这种集合，一个事物与它有着明确的隶属关系，要么属于这个集合，要么不属于这个集合，两者必居其一，不可模棱两可，如果用函数关系式表示，可写成

$$A(u)=\begin{cases}1，当\ u\in A\ 时，\\0，当\ u\notin A\ 时。\end{cases}$$

这里的 $A(u)$ 称为集合 A 的特征函数。特征函数的逻辑基础是二值逻辑，它是对事物“非此即彼”状态的定量描述，但不能用于刻画某些事物在中介过渡时多呈现出的“亦此亦彼”性。例如，取 A 为老年人集合，u 为一个年龄为 50 岁的人，我们拿不出什么令人信服的理由来确定 $A(u)$ 的值是 1 还是 0。这正是普通集合论的局限之所在。

与普通集合不同，模糊集合的逻辑基础是多值逻辑。对于这种集合，一个事物与它没有“属于”或“不属于”这种绝对分明的隶属关系，因而也就不能用特征函数 $A(u)$ 来描述。那么，怎样才能定量地描述模糊集合的性质和特征呢？模糊集合论的创立者札德给出了隶属函数的概念，用以代替普通集合论中的特征函数概念。隶属函数的实质，是将特征函数由二值$\{0,1\}$推广到$[0,1]$闭区间上的任意值。通常把隶属函数表示为 $\mu(u)$，它满足

$$0\leqslant\mu(u)\leqslant 1（或记作\ \mu(u)\in[0,1]）。$$

有了隶属函数概念，就可给模糊集合下一个准确的定义了。札德在 1965 年的论文中给出了如下的定义：

所谓给定了论域 U 上的一个模糊子集 A，是指：对于任意 $u\in U$，都指定了一个数 $\mu_A(u)\in[0,1]$，叫做 u 对 A 的隶属度，函数 μ_A 叫做 A 的隶属函数。

隶属函数的选取是一个较为复杂的问题，目前还没有一个固定和通用的模式，它依问题的不同可以有不同的表达形式。在许多情况下，它是凭借经验或统计分析确定的。

例如，某小组有五名同学，记作 u_1,u_2,u_3,u_4,u_5，取论域

$$U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\},$$

现在取 A 为由“性格稳重”的同学组成的集合，显然这是一个模糊集合。为确定每个同学隶属于 A 的程度，我们分别给每个同学的性格稳重程度打分，按百分制给分，再除以 100，这里实际上就是在求隶属函数 $\mu_A(u)$。如果打分的结果是 u_1 得 85 分，u_2 得 75 分，u_3 得 98 分，u_4 得 30 分，u_5 得 60 分，那么隶属函数的值应是 $\mu_A(u_1)=0.85$，$\mu_A(u_2)=0.75$，$\mu_A(u_3)=0.98$，$\mu_A(u_4)=0.30$，$\mu_A(u_5)=0.60$，可表示为 $A=(0.85,0.75,0.98,0.30,0.60)$，还可表示为 $A=\frac{0.85}{u_1}+\frac{0.75}{u_2}+\frac{0.98}{u_3}+\frac{0.30}{u_4}+\frac{0.60}{u_5}$，或 $A=\{(0.85,u_1),(0.75,u_2),(0.98,u_3),(0.30,u_4),(0.60,u_5)\}$。

普通集合与模糊集合有着内在的联系，这可由特征函数 $A(u)$ 和隶属函数 $\mu_A(u)$ 的关系来分析。事实上，当隶属函数 $\mu_A(u)$ 只取$[0,1]$闭区间的两个端点值$\{0,1\}$时，隶属函数 $\mu_A(u)$ 也就退化为特征函数 $A(u)$，从而模糊子集 A 也就转化为普通集合 A。这就表明，普通集合是模糊集合的

特殊情况，模糊集合是普通集合的推广，它们既相互区别，又相互联结，而且在一定条件下相互转化。正因为有此内在的联系，才决定了模糊数学可以广泛地使用明晰数学的方法，从明晰数学到模糊数学存在着由此达彼的桥梁。

模糊数学作为一门新兴的数学学科，虽然它的历史很短，但由于它是在现代科学技术迫切需要下应运而生的，因而对于它的研究，无论是基础理论还是实际应用，都得到了迅速的发展。

就其基础理论而言，模糊数学研究的课题已涉及广泛的范围，如模糊数、模糊关系、模糊矩阵、模糊图、模糊映射和变换、模糊概率、模糊判断、模糊规划、模糊逻辑、模糊识别和模糊控制等。

在应用方面，模糊数学的思想与方法正在广泛渗透到科学和技术的各个领域，如物理学、化学、生物学、医学、心理学、气象学、地质学、经济学、语言学、系统论、信息论、控制论和人工智能等。同时，在工农业生产的许多部门已取得明显的社会效益。

六、从手工证明到机器证明

机器证明是 20 世纪 50 年代开始兴起的一个数学领域，也是现代人工智能发展的一个重要方向。从传统的手工证明到定理的机器证明，是现代数学思想方法的一次重大突破。

1. 机器证明的必要性和可能性

定理机器证明的出现不是偶然的，而是有其客观必然性。它既是电子计算机和人工智能发展的产物，也是数学自身发展的需要。

首先，现代数学的发展迫切需要把数学家从繁难的逻辑推演中解放出来。我们知道，任何数学命题的确立都需要严格的逻辑证明，而数学命题的证明是一种极其复杂而又富有创造性的思维活动，它不仅需要根据已有知识和给定条件进行逻辑推理的能力，而且常常需要相当高的技巧、灵感和洞察力。有时为寻找一个定理的证明，还需要开拓一种全新的思路，而这种思路的形成竟要数学家们付出几十年、几百年乃至上千年的艰苦努力。如果把定理的证明交给计算机去完成，那就可以使数学家从冗长繁难的逻辑推演中解放出来，从而可以把精力和聪明才智更多地用于

富有开创性的工作，诸如建立新的数学概念，提出新的数学猜想，构造新的数学命题，创造新的数学方法，开辟新的数学领域等等，由此提高数学创造的效率。

其次，机器证明的必要性，还表现在数学中存在着大量用传统的单纯人脑支配手工操作的研究方法难以奏效的证明问题。这些问题往往因为证明步骤过于冗长，工作量十分巨大，使数学家在有生之年无法完成。电子计算机具有信息存储量大，信息加工及变换的速度快等优越性，这就突破了人脑生理机制的局限性与时空障碍。也就是说，如果借助电子计算机的优势就有可能使某些复杂繁难的证明问题得以解决。“四色猜想”的证明就是一个令人信服的范例。“四色猜想”提出于 19 世纪中叶，它的内容简单说来就是：对于平面或球面的任何地图，用四种颜色，就可使相邻的国家或地区区分开。沿着传统的手工式证明的道路，数学家们做了各种尝试，结果都未能奏效。直到 1976 年，由于借助于电子计算机才解决了这道百年难题。为证明它，高速电子计算机花费了 120 个机器小时，完成了 300 多亿个逻辑判断。如果这项工作由一个人用手工去完成，大约需要 30 万年。

第三，机器证明的可能性，从认识论上看，是由创造性工作和非创造性工作之间的关系决定的。我们知道，在定理的证明过程中，既有创造性思维活动，又有非创造性思维活动，而思维活动中的创造性工作和非创造性工作并不是完全割裂的，而是互为前提、相互制约、相互转化的，非创造性工作是创造性工作的基础，创造性工作又可以通过某种途径部分地转化为非创造性工作。当我们通过算法程序把定理证明中的创造性工作转化为非创造性工作之后，也就有可能把定理的证明交给计算机去完成。

第四，理论上的研究已经表明，的确有不少类型的定理证明可以机械化，可以放心地让计算机去完成。希尔伯特和塔尔斯基的机械化定理，就是对定理证明机械化可能性的一种理论探讨。吴文俊教授对几何定理证明机械化的可能性曾作过深入的研究，他将可施行机械化证明的实现划分为三种不同的类型，并给出了实现机器证明的一个行之有效的一般方法，这个一般化方法的基本思想是：首先借助坐标系，把定理的假设与求证部分用一些代数关系式来表示，然后再把表示代数关系的多项式作适

当处理，即把终结多项式中的坐标逐个消去，当消去的结果为零时，定理也就得证。

目前，机器证明作为数学研究的一种方法，还存在着许多理论和技术上的问题，这些问题的解决将有待于算法理论、计算机科学和人工智能等各个领域出现新的重大突破。

2. 机器证明的兴起和进展

机器证明的思想渊源可追溯到几何代数化思想的出现，然而历史上最先从理论上明确提出定理证明机械化思想的是希尔伯特。1899 年，他在《几何基础》这部经典名著中指出，初等几何中涉及从属平行的定理可以实现证明的机械化，他还提出了有名的“希尔伯特机械化定理”。希尔伯特的几何机械化思想遵循的就是一条几何代数化的道路：从公理系统出发，建立坐标系，引进数系统，把几何定理的证明转化为代数式的计算。这是一条从公理化走向代数化直至数值化的道路。1950 年，波兰数理逻辑学家塔尔斯基进一步从理论上证明，初等代数和初等几何的定理可以机械化，他还提出了以他的名字命名的机械化定理以及制造证明机的设想。

机器证明史上的第一项奠基性的突破，是由美国卡内基大学—兰德公司协作组作出的。1956 年，这个协作组的西蒙、纽厄尔和肖乌等人在电子计算机上成功地证明了罗素和怀特海所著的《数学原理》第二章 52 条定理中的 38 条。这一年可作为历史上计算机证明定理的开端。1963 年，他们又在计算机上证明了全部的 52 条定理，西蒙等人使用的是 LT（逻辑理论机）程序。这种程序不是刻板的固定算法程序，而是使用了心理学方法，将人脑在进行演绎推理时的逻辑过程、所遵循的一般规则和所经常采用的策略、技巧，以及简化步骤的一些方法等编进计算机程序，让计算机具有自己去探索解题途径的某种能力。这一程序为机器证明提供了一个切实可行的算法，通常称它为“启发式程序”。

在机器证明的开拓者中，还有著名的美籍华人王浩教授。1959 年，他只用 9 分钟的机器时间，就在计算机上证明了罗素和怀特海《数学原理》一书中的一阶逻辑部分的全部定理 350 多条，在当时数学界引起了轰动。

改进算法程序是提高机器证明效率的一个重要方面。在这方面，美国数学家鲁滨逊首先取得了重大突破。1965年，他提出了有名的归结原理，这一原理的基本出发点是，要证明任何一个命题为真，都可以通过证明其否定为假来得到。它要求把问题用一阶逻辑表示出来，并且变为只具有永真式或永假式性质的公式。由于许多定理都可以在一阶逻辑中得到表示，因而这一程序具有较大的实用性，对提高机器证明的效率有着重要的方法论意义，大大地推动了机器证明的研究。

20世纪70年代，机器证明得到重大进展。1976年，美国数学家阿佩尔和黑肯借助计算机成功地解决了"四色猜想"的证明问题。这是机器证明首次解决传统人脑支配手工操作所长期没能解决的重大问题。1971－1977年间，莱得索等人给出了分析拓扑学和集合论方面的一些著名定理的机器证明。1979年，波依尔和穆尔等人作出了递归函数方面的机器证明系统。

我国数学家在机器证明研究上也取得了显著的成果，引起了国内外学术界的关注。1977年，吴文俊教授证明了初等几何主要一类定理的证明可以机械化。1980年，他还用一部微机在20和60个机器小时左右分别发现了两个几何学的新定理。吉林大学和武汉大学的研究人员也在定理的机器证明方面取得了许多可喜的成果。

上面我们考察和分析了数学史上发生的6次重大突破。除了这6次重大突破外，还有许多重大事件也都具有一定的突破性，它们都不同程度地带来了数学思想方法的重大变化。如非欧几何的发展、群论的产生、勒贝格积分的建立、突变理论的出现、非标准分析的诞生，就是这样的事件。现代科学技术革命的兴起，向数学提出了一系列新的重大课题，可以预想，对这些课题的探讨，必将会引起数学在思想方法上发生的重大突破，使数学的面貌发生新的改观。

第四节　近代数学的主要成就

科学的发展与数学的发展往往相互交织在一起。在近代自然科学发

展初期，与力学得到较快的发展相联系，16- 18 世纪是常量数学到变量数学的转折时期。这一时期数学的主要成就有以下三项：

一、解析几何的创立

解析几何是数学中最基本的分支学科之一，也是科学技术中最基本的数学工具。解析几何的产生和发展，曾在数学的发展过程中起着非常重要的作用。

在古希腊，几何学几乎就是数学的同义词，代数以几何的面貌出现，代数问题的解决往往依赖几何方法的解决和论证。17 世纪初，生产力的发展和科学技术的进步，给数学不断提出新的问题，要求数学从运动、变化的观点去研究和解决一些实践与理论问题。比如，在变速运动中，应如何解决速度、路程和时间的变化问题，如何用数学语言描述和研究物体运动变化的过程，怎样用数学语言阐述抛物体的运动规律，等等。所有这些问题只用初等数学的方法显然是无能为力的，因此，研究和解决这些新的对象和实际问题，必须突破以往研究常量数学的范围和方法。

法国数学家笛卡儿（Descartes，1596—1650）和费马最先认识到要描述和研究物体运动变化的过程，必须借助和依靠新的数学工具即变量数学的方法。笛卡儿认为，数学不单是为了锻炼人们的思考能力，更主要的是为了说明自然现象，因此，必须给只说明静止状态的数学以新的要求和解释。笛卡儿在其《科学中正确运用理性和追求真理的方法论》一书的附录《几何学》中，较全面地叙述了解析几何的基本思想和主要观点，并创造了一种新的方法，即引进坐标，首先建立了点与数组的对应关系，进而将曲线看作是动点的轨迹，运用变量所适应的方程来加以表示。费马也提出，凡是含有两个未知数的方程，就总能确定一个轨迹，而且根据方程，便能描绘出曲线。

综上可见，解析几何的基本内涵和主要方法，就是通过坐标的建立，将几何的基本元素——点和代数的基本研究对象——数之间对应起来，然后在这个基础之上，建立起曲线或曲面与方程的对应关系。比如，已知动点的某种运动规律，即可建立动点的轨迹方程。同样，有了变量所适合的某个方程，就可以作出它所表示的几何图像，并根据方程讨论一些几何

性质。这样就将几何与代数紧密结合起来，利用代数的方法就能解决几何的问题，而且这种方法已成为研究和解决某些运动、变化问题的有力工具。由于变量数学的引进，大大地推动了微积分学的发展，使整个数学学科有了极其重大的进步。解析几何的产生，可以说是数学发展史上的一次重大飞跃。

二、对数的发明

随着天文学和航海业的发展，三角运算愈趋复杂，急需一种简便的计算方法，对数便应运而生。1614 年苏格兰数学家纳皮尔（J. Napier，1550—1617）发表了《奇妙的对数规则的描述》，首次对对数规则进行描述。由于对数能化乘除为加减，人们又制作了对数表，所以计算时间大大缩短。这项计算技术深受人们的欢迎，从而在世界范围内广为传播。不久各种计算工具相继产生。1617 年纳皮尔发明了一种能进行乘除、乘方、开方运算的算畴。1620 年英国人制成世界上第一把对数尺。1621 年英国数学家布里格斯完成了第一个常用对数表。1645 年法国数学家帕斯卡发明了能进行加减运算的手摇加法机。

三、微积分学的创立

17 世纪上半叶，以笛卡儿创立解析几何为标志，变量开始进入数学。17 世纪下半叶，牛顿和莱布尼兹系统地运用变量的观点和变量的方法，分别独立地建立了一门既非几何学又非代数学的新的学科领域——微积分。但他们所建立的微积分，都是从直观的无穷小量出发的，其理论基础可以说很不牢固。直到 19 世纪，A. L. 柯西（A. L. Cauchy，1789—1851）等人才把微积分学建立在极限理论上，尤其是 G. F. 康托尔（G. F. Cantor，1845—1918）等人建立严格的实数理论以后，极限理论才有了较严格、巩固的基础，微积分学最终得以严密化。在十八九世纪以后，数学家除了为微积分的完善做奠基工作外，在微积分的基础上发展出了无穷级数、常微分方程、偏微分方程以及变分法等学科。

微积分学由微分学、积分学两部分组成。其中，微分学研究函数的导数与微分及其在函数研究中的应用。导数是微分学的基本概念，其原型

是经典物理中的瞬时速度。导数是函数对自变量的变化率，因此，它是研究变量之间依赖关系的重要工具和手段。比如，自变量是时间，函数是距离或力所做的功，那么导数就分别是速度或功率。导数还可以用来研究函数的图形，借助导数能够求出某些函数的极大值和极小值，等等。

积分学主要研究积分的性质、计算及其在自然科学与技术科学中的应用。积分学的最基本概念是关于一元函数的定积分与不定积分。定积分的基本思想是通过有限逼近无限，即是有限和的极限，这样使用极限的方法就使积分学有了严格的理论基础。不定积分是对于某一给定函数，求出一个或一族（若运算结果不唯一）函数，使其导数为这一给定函数，可见对求出的一个或一族函数进行微分就可得到该给定函数，所以积分是微分的逆运算。

微积分开创了不同于以往的全新的数学研究领域和方法，使数学研究走向更加抽象和深刻，促进了数学理论的发展。在数学的应用上，使人们得到了较之以往新型的计算技巧，扩大了数学的应用领域。

总之，微积分的思想、方法在理论和应用两个方面极大地推动了近代数学的发展，以致可以说，整个 18 世纪的主要数学成果，都是在以微积分为核心思想的带动下取得的。而微积分思想在逻辑上的某些缺陷与不足，又给现代的数学研究开辟了新的方向和领域。

第五节　现代数学的研究进展

现代数学是指 20 世纪的数学。1900 年德国著名数学家希尔伯特（D. Hilbert）在世界数学家大会上发表了一个著名演讲，提出了 23 个预测和指导今后数学发展的数学问题（见附录 3），拉开了 20 世纪现代数学的序幕。

现代数学的发展，与初等数学、变量数学相比，具有以下几个显著特点：

一、数学研究内容更加抽象，研究成果更为丰硕，数学分支日益增多且相互渗透

抽象性是数学的显著特征之一。而现代数学较之初等数学、近代数学，更加抽象、更加高深、更加庞大复杂。集合论观点与公理化方法将数学的发展引向了高度抽象的道路。结合数学对各个学科中重要问题的研究，使得原有的许多学科（如代数学、拓扑学、函数论、泛函分析等）在新的基础上得到了更大的发展。酝酿于19世纪，发展、定型、成熟于20世纪上半叶的被人们称为数学"新三高"的泛函分析、抽象代数、拓扑学等，都是在原来抽象概念的基础上再次抽象出新概念并加以研究，是抽象之抽象的结果，一方面，它们互为独立，有着各自的研究领域，另一方面，它们又相互渗透、互为借鉴并产生许多边缘学科。比如，抽象代数与拓扑学的结合产生了拓扑群；泛函分析与抽象代数的结合产生了算子环；拓扑与泛函的结合产生线性拓扑空间等。人们认为，数学理论正向着"高维"与"多变量"的方向前进。

同时，对数学基础问题的探讨也促使了一些新的数学学科（如数理逻辑、公理化集合论等）的形成，人们逐渐认识到在数学中有一些基本结构（代数结构、拓扑结构、序结构以及后来认识到的测度结构），这些结构的相互影响和渗透使得数学的很多学科得到长足的发展，并形成一些新的学科（如概率论、随机过程、微分几何、微分方程、代数几何、多复变函数论等）。

随着各门科学的数学化，新的数学分支在不断地涌现。许多与数学有关的边缘学科，如生物数学、数学心理学、数学考古学等数学边缘学科也在大量产生。

二、数学研究以公理化为目标，以集合论为基础，以结构为对象

公理化是最重要的数学思想方法之一，它既是建构数学理论的思想方法，又是表述数学理论的思想方法。许多数学命题不仅可以通过公理法得到，而且公理法还把它们组织成为一个体系即形成数学理论。现代数学几乎都是按公理法建构起来的，因此，公理化已成为数学研究的重要

目标之一。

19 世纪 80 年代以康托尔的集合论为标志，数学进入现代数学时期。从 20 世纪初开始，集合论的思想方法不仅应用于几乎所有纯数学部门，而且广泛运用到其他自然科学领域，特别是物理学之中。

20 世纪最具影响的法国布尔巴基学派奉行结构主义的观点，认为全部数学基于三种母结构，即代数结构、序结构和拓扑结构。他们把现代数学定义为研究结构的学科，犹如古代数学主要研究常量，近代数学主要研究变量一样。

三、重视数学基础研究，关注数学哲学问题

20 世纪以来，数学基础和数学哲学问题成为众多数学家关心的热点，不同的数学家接受了数学历史上的不同数学思想和数学哲学观点，并由此产生了研究数学基础的不同学派。这些学派提出了不同的数学观点和改造数学的方案，他们相互争论、互相批判，把数学基础和数学哲学的研究推向了高潮。现代数学哲学的研究内容包括数学基础的研究，形成罗素的逻辑主义、布劳维的直觉主义和希尔伯特的形式主义等流派。

四、计算机的出现促使数学研究的方式发生了变化，“做数学”的过程更加凸显

数学的应用，主要是作为一种科学方法的应用，它表现为数学向现代科学技术全面渗透，对其他学科的语言表述、问题论证、计算方法等产生了深刻的影响。对计算机技术的影响尤其重大，计算机的产生是以数学的发展为重要条件的，而计算机的产生和发展反过来又影响着数学发展的进程。一些繁重的数字计算以及某些复杂的数学证明可以运用计算机来完成，计算机把数学家从“简单劳动”中解放出来，使他们集中精力于创造性劳动，这对数学发展的进程无疑将产生重大影响。

计算机的出现不仅使数学比以往任何时候都更具威力，同时也极大地改变了数学科学自身的某些特点。一方面，计算机进入数学领域，使一些以前不太受重视的数学理论重放光彩，促进了计算数学、数学模型、离散数学、数理逻辑等许多数学分支的发展，并开发了许多边缘科学（如人

工智能、图像识别、机器证明、数据处理等）；计算机开拓了一系列数学研究的新领域和新课题，改变了数学各分支之间的平衡，也促进了数学内部的统一；计算机为数学发现和证明提供了新工具。数学为解释自然现象提供了构造模型的方法，也开发出运用计算机语言实现这些模型的算法，极大地提高了计算机处理问题的能力。事实上，计算机本身以及计算机的进一步开发、改进和应用都离不开数学。另一方面，正如计算机给数学提供了新的机会一样，数学也使计算机越来越具有了不可思议的威力。同时，计算机的出现，向数学家提供了探索模式和检验猜想的强有力的工具，使数学家的研究方式开始发生变化。实际上，计算机提供了进行多次试验计算的可能性，为数学研究提供了有力的“实验工具”。

五、数学广泛应用于各个领域，具有了“技术”的品质

广泛的应用性也是数学的一个显著特征。宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，无处不用数学。20 世纪里，随着应用数学分支的大量涌现，数学已经渗透到几乎所有的科学部门。不仅物理学、化学等学科仍在广泛地享用数学的成果，连过去很少使用数学的生物学、语言学、历史学等，也与数学结合形成了内容丰富的生物数学、数理经济学、数学心理学、数理语言学、数学历史学等边缘学科。

现代数学不只是通过别的科学间接地起作用了，它已经直接进入科技的前沿，直接参与创造生产价值——数学已经走到前线了。现代数学与计算机相结合而产生的威力无穷的“数学技术”，渗透到了与人类生存息息相关的各个领域，成为一个国家综合国力的重要组成部分。

现代数学对工程技术有着重大的影响和作用。比如在大型工程中，周密的计算、精确的数据往往是建设大型工程的基础。像我国的三峡水利工程这样举世瞩目的超大型工程，需要解决的大型工程计算是非常众多的，如施工中大体积的混凝土在凝结过程中的化学反应所产生的热，会使坝体产生不均匀的应力，甚至形成裂缝而危害大坝安全。在以往，一般都要花费大量的财力进行事后修补。而现在，可以应用计算的方法动态模拟混凝土在施工过程中的温度、应力和徐变状况，从中分析、比较、优选各种施工方案。大坝建成后，还能应用动态模拟的计算方法进行监控和

测算，以确保大坝的安全等。

随着科学技术的进步及其对人类社会生活的广泛影响，使社会科学领域某些学科的研究变得日益复杂，一些自然科学的研究方法、问题观点甚至个别结论也日益渗透到各门社会科学的具体研究中，从思想方法、逻辑证明、精确分析、数理统计等方面给予社会科学广泛影响。比如，在现代经济学中，如果缺乏使用数学的概念、思想、方法对经济活动进行论证和分析，那么，这样的经济行为就难以达到应有的效果，宏观经济结构也可能失调并导致社会经济发展战略的失败，因此有人认为，一位不懂数学的经济学家决不会成为杰出的经济学家。在 1969 年至 1981 年间颁发的 13 个诺贝尔经济学奖中，有 7 个有关定量经济学方面的。

从人类早期的战争开始，数学就无所不在，不论是发射弩箭还是挖掘地道，数学就像冥冥之中的命运之神一样在起作用。虽然战争是个令人讨厌的话题，但战争却是人类不可避免的。

提起数学与军事，人们可能更多地想到数学可以用来帮助设计新式武器，比如阿基米德的传奇故事：阿基米德所住的 Syracuse 王国遭到罗马人的攻击，国王 Heron 请其好友阿基米德帮忙设计了各式各样的弩炮、军用器械，利用抛物镜面会聚太阳光线，焚毁敌人船舰等。当然，这样的军事应用并没有用到较高层次的数学。《五曹算经》中的兵曹，其所含的计算，仅止于乘除；再进一步，也不过是测量与航海。一直到 20 世纪，科学发展促使武器进步，数学才真的可能与战事有密切的关系，例如数学的研究工作可能与空气动力学、流体动力学、弹道学、雷达及声纳、原子弹、密码与情报、空照地图、气象学、计算器等等有关，而直接或间接影响到武器或战术。

在我国的国防建设中，之所以能在很短的时间内研制成功原子弹、氢弹以及其他先进武器，一个非常重要的原因是我国有许多优秀的数学家参加了这项工作。比如，我国的试验次数仅为西方国家的 1/10，从原子弹到氢弹只用了 2 年 8 个月，在较短时间里成功发射火箭和卫星等等，这其中凝聚着许多数学家的心血和智慧。

另外，数学在其他方面也有着广泛的应用。例如，在环境保护与预防自然灾害方面，可以应用数学的方法对江、湖、河口的污染扩散、土壤洗盐

等问题进行分析和模拟，从而有效地保护环境与预防灾害。在农业经济的发展和生态农业的开发上，应用一定的数学模型，能够对农业经济系统的优化、林业的开发、土地资源的合理使用等方面，提出有效、可行的对策。

综上所述，各门学科的“数学化”是现代科学发展的一个大趋势。数学与人类文明的联系与应用是多方面、多层次的。可以毫无愧言地说，信息时代就是数学时代。联合国科教文组织在1992年发表了《里约热内卢宣言》，将2000年定为数学年，并指出“纯粹数学与应用数学是理解世界及其发展的一把主要钥匙”。未来不管你将从事自然科学还是社会科学，请记住这句话，并用你的胆力、智慧和勤奋把人类文明推向新的高峰。

思考题：

1. 谈谈你对数学的认识。
2. 数学有哪些特征？
3. 数学的发展经历了哪几个阶段？

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

第二章

作为思想史要素之一的数学

数学是人类思考中最高的成就。

——米斯拉

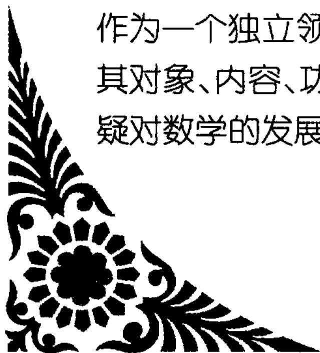
数学是知识的工具，亦是其他知识工具的泉源。所有研究顺序和度量的科学均与数学有关。

——笛卡儿

数学是一种理性的精神，使人类的思维得以运用到最完善的程度。

——克莱因

数学同其他各门学科一样，在其发展的过程中，形成了一系列适合于自身特点的思想方法。数学是一门高度抽象而又计算精巧的学科，学习数学必须讲究思想方法。在数学发展史中，数学思想方法不断为人们所掌握和运用，并创造出一个又一个成果。因此，在《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》中要求我们帮助学生“真正理解和掌握基本的数学知识与技能、数学思想和方法，获得广泛的数学活动经验”。《普通高中数学课程标准（实验稿）》的前言中提出了“使学生掌握数学的基本知识、基本技能、基本思想，使学生表达清晰、思考有条理……”过去对数学成果本身的收集、分析与说明较为重视，发表了许多论著，这是有益的。但是，由于种种原因，对数学思想方法的考察与研究却有所忽略。而正因为对数学思想方法缺乏应有的重视，所以在一定程度上影响了数学成果的取得和数学人才的培养。因此，把数学思想方法作为一个独立领域加以研究，从方法论的高度，探讨其对象、内容、功能以及孕育、形成与发展的规律，无疑对数学的发展与哲学的研究，都是有重要意义的。





第一节　数学思想方法概述

数学教育的任务，是让学生学习和掌握数学科学。因此，数学教育不能只谈教育，不谈数学。一个数学教师，必须具备丰富的数学知识，掌握数学技能，更重要的是理解数学的本质，掌握数学思想方法。只有这样，学生才能受到数学科学的熏陶，了解数学科学的体系，体会数学科学的精髓。

数学教学有两种不同的水平。低级水平是介绍数学概念，陈述数学定理和公式，指出解题的程式和套路，以便通过考试。高级水平是着眼于数学知识背后的数学思想方法，在解决数学问题的过程中进行深层次的数学思考，经过思维训练，获得数学美学的享受。自从 20 世纪 90 年代以来，重视数学思想方法的教学已经成为中国数学教育的一大特色。继承和发扬这一优势，是 21 世纪数学教育工作者的一项重要任务。

数学教科书里陈述的数学，相当的程式化，可以说是冰冷的美丽。但是，在数学家创立这些数学定理和公式的时候却是经过了火热的思考。原始的思想，独特的方法，正是这些重大数学发现的核心。数学教育的任务是把数学的学术形态转换为学生易于接受的教育形态，将冰冷美丽的数学恢复为火热的思考。

我们常常说评价一堂数学课的质量，首先要关注教学过程是否揭示了数学的本质，让学生领会数学内容的精神。这里所说的本质与精神，就是数学思想方法。如果一堂数学课能够使学生体会到其中的数学思想和方法，那么这堂课就属于高品位的数学课。

哲学是自然科学和社会科学的概括。数学是自然科学和社会科学中数量关系的概括。因此，我们可以从宏观到微观将数学方法分成以下四个层次。

一、基本的和重大的数学思想方法

这是一种宏观的数学思考，往往是一个数学科学的出发点，也会依托

于一种哲学范畴的数量化。

形式与内容。形式与内容是一对哲学范畴。世间万物都有自己的物质运动形式，或者物理运动，或者化学运动，或者社会运动等等。但是数学是纯粹的形式。1,2,3,4 这样的自然数，是一种抛开具体内容的纯粹的数量形式。但是，形式并非自由意志创造物，形式服从内容。所以，数学要联系实际，反映现实世界中的关系，用于实际的应用。

运动与静止。运动与静止也是一对哲学范畴，它的数量化就是常量数学。函数思想反映物质运动时的变量之间的依赖关系，微积分思想则是利用无限思想研究函数变化关系。中学里学习变量、函数，研究函数的性质，把函数作为一种模型，就是为了从数量上把握运动。

偶然与必然。这对哲学范畴的数量化，形成了确定性数学和随机性数学。概率论是研究随机现象的数学，数理统计方法则是通过分析数据的随机性而产生的学科。今天，我们重视概率与统计方法，正因为世界上充满着偶然性，而且偶然性后面具有必然性。掷硬币可以随机地出现两种情况，但是在大数量的投掷下，最后呈现各为 1/2 的概率。人们设法用背后存在着的必然规律把握偶然，认识偶然。

现象与本质。任何事物都有现象和本质两个方面。在数量关系上也是如此。给定一个情景，其中有各种量，以及各种量之间的关系。那么，哪些量是重要的、本质的？哪些量是无关的，可以忽略的？哪些关系反映了数量变化的本质？这就是数学模型方法。数学建模过程，就是透过现象看本质，建立起一种可以分析研究的模型，借以观察变化，获得特性，推测未来。一个著名的例子是欧拉的多面体定理。不管一个多面体的形状多么奇特，尺寸如何变化，总有公式：点数＋面数－棱数＝2。多面体的外形是现象，它的拓扑特性才是本质。

原因与结果。世界上万物都有一定的因果关系。揭露因果关系是各门学科的任务。数学承担的任务，是彼此间的逻辑关系。它可以不管哪个原因导致哪个结果，却是一般地讨论因果之间的逻辑联系：充分条件、必要条件、排中律、传递性等。

其他如精确与近似（计算数学），整体与局部（函数的整体性质与局部性质），同一与差异（模糊数学）等等，都是考察重大数学思想方法的视角。

二、与一般科学方法相应的数学方法

数学方法是一般科学方法的特例。自古以来，人类在认识世界的过程中积累了许多科学方法。数学也可以拿来使用，不过数学还是有自己的特点。

分析与综合。对一个事物进行分析，首先要进行分类。数学的分类强调“不重不漏”，这是为了保证数学结论的完备性和独立性。比如要考察一个有关实数 x 的结论，就得讨论 $x>0, x=0, x<0$ 三种情形，彼此不重也不遗漏。这种情形在人文科学中往往做不到。例如，俄罗斯是欧洲国家也是亚洲国家，因此，如果按大洲对国家分类就会重复。数学分析是一个庞大的数学分支，这是指无穷小的分析，为其他学科所没有。数学的综合，更多地体现在数学学科之间的交融，例如代数学与几何学的综合，即常说的数形结合的方法。此外，如微分几何学则是微分学和几何学的综合等等。

归纳与演绎。归纳与演绎更具有数学的特点。数学是一门演绎的科学，主要是运用演绎的论证，达到数学的真理性。同时数学也使用一般的归纳法。在进行数学猜想的时候就要根据已知的事实，归纳得到一些结果，然后再进行演绎的论证。“合情推理”，正是建筑在归纳的基础上。此外，数学的特点是完全的归纳法——数学归纳法，这种归纳法的特点是跨越无限的思想实验。由于在描述具体事物时通常只能进行有限的归纳，因此这是数学所特有的。

其他如观察、类比、联想等一般科学方法，都可以用于数学研究。至于野外考察、用仪器做实验、社会调查等方法，数学用得比较少。

数学也有实验，多半是思想实验，即假定某条件，那么会有某种结果，因而可以达到目的或者否定命题。近几年，由于计算机和计算器技术的使用，我们也常常做一些计算性的检验，通过计算一些特例得到普遍的猜想，甚至用近似方法逼近最后的结果。方兴未艾的“计算机模拟实验”正在成为一种常用的数学方法。例如“100 以内的自然数，有哪些能够表示为自然数的等差数列之和？”计算机用枚举法就可以把所有的解找出来，这就是实验。

关于分析与综合、归纳与演绎等数学方法，是在数学过程中潜移默化进行的。“润物细无声”，单靠讲解是没有用的，只能在生活实践中慢慢体会，逐步形成。

第二节　数学思想方法在科学中的作用和地位

一、数学思想方法研究的意义

从数学发展史上看，长期以来，数学家们对自己所从事研究领域的思想方法是重视的，并有许多发明和创造。但是，对数学思想方法本身尤其是把它作为一个独立的领域或学问来进行研究，却是很不够的。究其原因，主要是对数学思想方法研究的意义缺乏应有的认识，那么，研究数学思想方法到底有何意义呢？

1. 有利于培养数学能力与改革数学教育

我们知道，数学教育的根本目的在于培养数学能力，即运用数学解决实际问题和进行发明创造的本领，而这种能力和本领，不仅表现在对数学知识的记忆，而且更主要地反映在数学思维方法的素养。事实上，我们说一个人数学能力强，有数学才能，并不简单地指他记忆了多少数学知识，而主要是说他运用数学思想方法解决实际问题和创造数学理论的本领。伽罗瓦之所以创立群论，罗巴切夫斯基之所以创立非欧几何，维纳之所以创立控制论，不仅仅在于数学知识的积累与记忆，而主要是由于他们在数学思想方法上实行了革命性的变革所致。对一个科技工作者来说，需要记忆的数学知识可多可少，但掌握数学思维方法则是绝对必要的，因为后者是创造的源泉，发展的基础，也是数学能力的集中体现。在过去的数学教育中，正是因为过于重视知识的传授和背诵，而忽略思想方法的讲解和分析，加之传统的考试制度，所以出现了“高分低能”的现象。要想改变这种状况，就要狠抓数学思想方法的研究与教学，并把它作为数学教育改革的重要内容坚持下去，取得成效。

2. 有利于充分发挥数学的功能

数学功能的发挥，同数学能力的培养一样，关键不在于知识的积累与传递，而在于思想方法的领会、运用以及创造新的思想方法。实践越来越证明，数学在科学技术各领域、社会科学各部门以及生产、生活的各行各业，都有广泛的应用。这是因为，任何事物都是量与质的统一体，要想真正认识某一事物，不仅要把握其质的规定性，而且还要了解其量的规定性，因此，数学能够应用于各种物质运动形态，马克思曾指出：一门科学只有当它达到了能够运用数学时，才算真正发展了。那么怎样在各方面更加广泛地应用数学呢？我们认为，加强数学教育特别是加强数学思想方法的教育，是至关重要的。数学的科学功能的发挥，主要是靠数学思想方法向科学各领域的渗透与移植，把数学作为一种工具加以运用，从而促进其发展。当代科学数学化的趋势明显地反映出这一点。数学的思维功能的发挥也是如此。我们说数学是一种思维工具，实质上就是指它的思想方法。为什么往往通过数学的考核来判定一个儿童的思维能力与智力水平呢？其根据也在这里。至于数学的社会功能的发挥，同样还是靠数学思想方法的运用。我们说某人办事有数学头脑，无非是说他能灵活地运用数学思想方法。欧拉作为一位数学家，之所以不仅在代数、数论、微积分等数学分支研究上取得了突出成果，而且还在力学、物理学、天文学、航海、造船、建筑等许多非数学领域与部门做出重大贡献，集中到一点就是他具有深刻的数学思维和非凡的运用数学解决实际问题的才能。这也是他之所以能成为数学史上著名应用数学大师的根本原因所在。

3. 有利于深刻认识数学本质与全面把握数学发展规律

在数学思想方法的研究中，我们可以通过对数学内容辩证性质的探讨，进一步认识数学的本质。马克思和恩格斯在自己的著作中，都对微积分内容的辩证性质作过精辟的分析，并概括其本质。马克思在《数学手稿》中着重对导函数概念作了探讨，他认为，导函数生成的过程就是原函数经历了“否定之否定”的发展过程，并深刻指出：“理解微积分运算时的全部困难（正像理解否定的否定本身时那样），恰恰在于要看到微积分运算是怎样区别于这样简单手续并因此导出实际结果的。”恩格斯在谈到微积分的本质时，也曾经明确指出：“变数的数学——其中最重要的部分是

微积分——本质上不外是辩证法在数学方面的运用。"事实上，微积分中所运用的思想方法，实质上就是辩证法。就拿微积分中最基本的牛顿-莱布尼兹公式来说，就是通过常量与变量的相互转化而推得的。本来作为曲边梯形面积的定积分是一个确定的常量，但为了推导牛顿-莱布尼兹公式，却特地把此定积分看作是上限函数，即把常量转化为变量。然后，在证明一个定理成立的基础上，又反过来把变量转化为常量，最终得到了这一公式。因此，我们可以说，牛顿-莱布尼兹公式就是转化与变量辩证统一的结果。

关于通过数学思想方法的研究，可更加全面把握数学规律的问题，前面已经讲过，它可从数学内部的矛盾运动这个侧面来发现和认识规律，以弥补过去只注重从外面研究的不足，比如，在关于数学潜形态的研究中，一方面可以提高对数学新思想萌发和形成规律的认识，另一方面，还可以加强对数学由"潜"到"显"转化机制的掌握。研究表明：对新事实的解释、对理论体系自身矛盾的研究、对个体结论的推广等，均是科学新思想产生的有效途径；树立科学成效观、积极开展自由论争、大力倡导科学伯乐精神、实行科学的组织管理等，都是加速科学由"潜"到"显"转化的重要机制。这对深入探讨数学由"潜"到"显"转化的规律，显然是有启示意义和参考价值的。

总之，数学思想方法的研究，具有十分重要而深远的意义。我们相信，数学思想方法作为一个独立的研究领域，必将不断取得新的研究成果，为数学、自然科学、教育科学与哲学的发展，做出应有的贡献。

数学思想方法产生于数学知识，而数学知识又蕴藏着数学思想，两者相辅相承，密不可分。正是数学知识与数学思想方法的这种辩证统一性，决定了我们在传授数学知识的同时必须重视数学思想方法的教学。因此在数学教学活动中，学生的认知活动不能仅限于掌握课本中的数学知识，更重要的是在知识的探索过程中领会和掌握数学思想方法。教学实践表明：在讲授数学概念、公式、定理的形成过程中渗透数学思想方法就能发展抽象概括能力和逻辑思维能力，在例题教学中运用数学思想方法启发学生发现解题思路，寻求解题规律，就能培养学生分析问题和解决问题的能力。

数学思想方法又是处理数学问题的指导思想和基本策略，是数学的灵魂。因此，引导学生领悟和掌握以数学知识为载体的数学思想方法，是使学生提高思维水平，真正懂得数学的价值，建立科学的数学观念，从而发展数学、运用数学的重要保证，也是现代教学思想与传统教学思想的根本区别之一。

总之，加强数学思想方法的教学就能优化课堂教学，有利于把握好能力目标的发展点，培养学生的创新意识，进而提高学生的数学素质。

二、数学思想的特性

数学思想是在数学的发展史上形成和发展的，它是人类对数学及其研究对象，数学知识（主要指概念、定理、法则和范例）以及数学方法的本质性的认识。数学思想表现在对数学对象的开拓之中，表现在对数学概念、命题和数学模型的分析与概括之中，还表现在新的数学方法的产生过程中。数学思想具有如下的突出特性和作用。

1. 数学思想凝聚成数学概念和命题，原则和方法

我们知道，不同层次的思想，凝聚成不同层次的数学模型和数学结构，从而构成数学的知识系统与结构。在这个系统与结构中，数学思想起着统帅的作用。

2. 数学思想深刻而概括，富有哲理性

各种各样的具体的数学思想，是从众多具体的个性中抽取出来且对个性具有普遍指导意义的共性。它比某个具体的数学问题（定理、法则等）更具有一般性，其概括程度相对较高。现实生活中普遍存在的运动和变化、相辅相成、对立统一等“事实”，都可作为数学思想进行哲学概括的材料，这样的概括能促使人们形成科学的世界观和方法论。

3. 数学思想富有创造性

借助于分析与归纳、类比与联想、猜想与验证等手段，可以使本来较抽象的结构获得相对直观的形象的解释，能使一些看似无处着手的问题转化成极具规律的数学模型，从而将一种关系结构变成或映射成另一种关系结构，又可反演回来，于是复杂问题被简单化了，不能解的问题的解找到了。如将著名的哥尼斯堡七桥问题转化成一笔画问题，便是典型的

一例。当时,数学家们在作这些探讨时是很难的,是零零碎碎的,有时为了一个模型的建立,一种思想的概括,要付出毕生精力才能得到,这使后人能从中得到真知灼见,体会到创造的艰辛,发展顽强奋战的个性,培养创造的精神。

三、学习数学思想方法的重要性

我们的教学实践表明:数学教育的现代化,主要不是内容的现代化,而是数学思想、方法及教学手段的现代化,加强数学思想方法的教学是基础数学教育现代化的关键,特别是对能力培养这一问题的探讨与摸索,以及社会对数学价值的要求,使我们更进一步地认识到数学思想方法对数学教学的重要性。下面就数学思想方法对数学教学的作用谈几点认识。

1. 现实的需要决定数学思想方法对数学教学有着重要的作用

(1)形势发展的需要决定数学思想方法的作用

时代的前进依赖于科技的发展,现代科技日新月异,社会主义市场经济的迅猛发展,现代科技及经济发展成熟的标志是数学化,例如市场经济中经济统计学、金融学等领域就极需要数学的支撑,在探索科技与经济发展的过程中,当然需要某些具体的数学知识,但更多的是依靠数学思想与方法的运用,以便从数学的角度去思考周围的实际问题,建立数学模型,从而来预测发展的前景,决策下一步的行动……可以说,时代的发展越来越依赖于数学思想和方法的作用。

(2)教育目的的需要决定数学思想方法的作用

目前,我国正处在实施素质教育、深化教育改革阶段,由于数学思想与方法的重要作用,使得数学教育在素质教育中具有特殊的地位。数学是思维的体操这是众所周知的,数学思想方法哺育着人养成诚实、正直、严肃认真、踏实细微、机智、顽强等当今时代迎接挑战不可或缺的精神,这是我们普遍感觉到了的。

当前国际教育界提出了"大众数学"的口号,其目的是根据社会对数学的不同要求,为全体学生规划、提供水平适应的数学教育,为社会提供各层次、各类型的工作者。对大多数学生来说,数学思想方法比形式化的数学知识更重要,因为前者更具有普遍性,社会各部门、各行业对数学知

识的要求的深度与广度的差异是很大的，但对人的素质的要求是共性的，如要求走向社会的人具备严谨的工作态度，具有善于分析情况、归纳总结、综合比较、分类评析、概括判断的工作方法。实际工作者、科研工作者，特别是决策部门工作人员更需要逻辑论证、严密推测的科学方法与工作作风，这一切都是在数学思想方法的渗透、训练中得以培养的。通过对具体事物进行抽象概括而得到的数学模型，与现实世界有着千丝万缕的联系，并且可以反过来应用于现实世界解决各种实际问题。

2. 认知的实现，让数学思想方法在数学教学中发挥着重要的作用

学习的认知结构理论告诉我们，数学学习过程是一个数学认知过程，其实质是一个数学认知结构的发展变化过程，这个过程是通过同化和顺应两种方式实现的，在同化和顺应进行中，数学思想方法在数学认知结构中发挥着极为重要的作用。

(1)数学思想方法对数学教学的同化过程起着重要作用

数学学习中的同化，就是主体把新的数学学习内容纳入到自身原有的认知结构中去，这种纳入不是机械的囫囵吞枣式摄入，而是把新的数学材料进行加工改造，使之与原数学认知结构相适应。那么，怎样加工新的数学材料才能使它与原数学认知结构相适应呢？任意的、盲目的加工能达到这个目的吗？显然不能！这种加工要具有自觉的方向性和目的性，肯定是在某种因素的指导下进行的，在数学认知结构中存在数学基础知识、数学思想方法、心理成分三种主要因素，数学基础知识显然不具备思维特点和能动性，不能指导“加工”过程的进行，就像材料本身不能自己变成产品一个道理，而心理成分只给主体提供愿望和动机，仅凭它也不能实现“加工”过程，就像人们只有生产愿望和生产工具而没有生产产品的设计思想和技术照样生产不出产品一样。数学思想和方法担当起了指导“加工”的重任，它不仅提供思想策略(设计思想)，而且还提供实施目标的具体手段(化归技能)。实际上数学中的转化，就是实施新旧知识的同化。总之，数学思想和方法对数学活动的同化过程起着重要作用。

(2)数学思想方法对数学教学的顺应过程起着指导作用

数学学习中的顺应是指主体原有数学认知结构不能有效地同化新的学习材料时，主体调整或改造原有的数学认知结构去适应新的学习材料。

这种对原认知结构的改造也不是任意盲目进行的，与同化过程的分析一样，也必然是在数学思想方法的指导下进行的，离开了数学思想方法的顺应是不可理解的，也是不可能实现的。

（3）数学思想方法是数学认知结构发展的实现因素

通过上面的分析看到，数学思想方法对同化和顺应的进行，进而对认知结构的发展起重要作用。实际上，无论是同化还是顺应，都是在原数学认知结构和新的数学内容之间，改造一方去适应另一方，这种改造就是转换或化归，而转换或化归是数学思想方法体系中的“主梁”和精髓。数学思想和方法产生于数学认知活动，又反回来对数学认知活动起重要作用，因此可以说数学思想方法是数学认知结构中最积极、最活跃的因素，是认知的实现因素。

3. 认识的规律决定了数学思想方法对数学教学有着促进作用

（1）掌握了数学思想方法，能够使得数学知识更容易理解

心理学认为：“由于认知结构中原有的有关观念在包摄和概括水平上高于新学习的知识，因而新知识与旧知识所构成的这种类属关系又可称为下位关系，这种学习便称为下位学习。”当学生掌握了一些数学思想和方法，再去学习相关的数学知识，就属于下位学习了。下位学习所学知识“具有足够的稳定性，有利于牢固地固定新学习内容的意义”，即可使新知识能够顺利地纳入学生已有的认知结构中去。学生学习了数学思想方法就能够更好地理解和掌握教学内容。

（2）有利于数学知识的记忆

布鲁纳认为：“除非把一件件事情放进构造好的模型里面，否则很快就会忘记。”“学习基本原理的目的，就在于保证记忆的丧失不是全部丧失，而遗留下来的东西将使我们在需要的时候得以把一件件事情重新构思起来。高明的理论不仅是现在用以理解现象的工具，而且也是明天用以回忆那个现象的工具。”由此可见，数学思想方法作为数学学科的“一般原理”，在数学学习中是至关重要的。无怪乎有人认为，对于中学生“不管他们将来从事什么工作，唯有深深地铭刻于头脑中的数学精神、数学思维方法、研究方法，却随时随地发生作用，使他们受益终身”。

(3)有利于“原理和态度的迁移”

布鲁纳认为，这种类型的迁移应该是教育过程的核心，就是用基本的和一般的观念来不断扩大和加深知识。曹才翰教授也认为：“如果学生认知结构中具有较高抽象、概括水平的观念，对于新学习是有利的。”“只有概括的、巩固的和清晰的知识才能实现迁移。”美国心理学家贾德通过实验证明：“学习迁移的发生应有个先决条件，就是学生需先掌握原理，形成类比，才能迁移到具体的类似学习中。”学生学习数学思想方法有利于实现学习迁移，特别是原理和态度的迁移，从而可以较快地提高学习质量和数学能力。

第三节　常用的数学思想方法

一、数学抽象方法

数学从内容到方法都显示出极其高度的抽象性。数学方法是进行科学抽象的一种思维方式，它具有两个基本特征：概括性和深刻性。数学在考虑事物时，它把这些事物的物理属性、化学属性或生物属性全撇开，而只考虑其量的特征、形的特征；同时数学的思维具有一定的深刻性，它往往借助于数学概念及以数学概念为基础的规律所进行的推理、判断来探寻事物的本质，洞察到事物的底蕴。

哥尼斯堡七桥问题是欧拉探究解决并对于开创拓扑学数学分支有重大意义的一个典型例子。

18世纪的哥尼斯堡是德国一个美丽的城市(现属于俄罗斯)，布勒尔河穿城而过，它有两个支流，在哥尼斯堡城中心汇成大河，河中间有一个小岛，河上有七座桥(图2-1)，岛上有一座古老的大学，一座教堂，还有哲学家康德的墓地及塑像。当地的居民，特别是大学生们常常到七桥附近散步。渐渐大家热衷于一个问题，即一个人如何能不重复地一次走遍这七座桥而返回出发点？很多人作过尝试，但都未能实现，这便产生了数学

史上著名的“七桥问题”,1735 年一群大学生写信给著名的数学家欧拉。

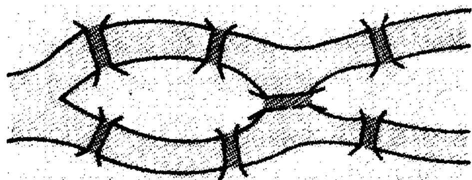


图 2-1

欧拉首先从千百人次的失败中猜想,也许根本不可能不重复地一次走遍这七座桥,但如何来证明它呢? 欧拉是这样探究这个问题的:

他想,既然岛与半岛无非是桥的连接地点,两岸陆地也是桥通往的地点,那么就不妨把这四处地点抽象成四个点,并把七座桥抽象成七条线(图 2-2),这样不改变问题的实质,问题就成了一个有关几何图形的问题(图 2-3),即人们步行走过这些地方和七座桥时,就相当于用笔画出此图。于是问题转化为:能否用笔不重复地一笔画出此图。

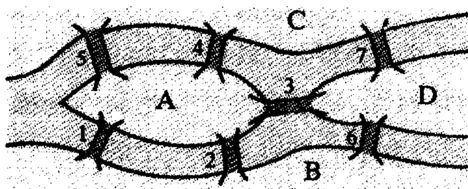


图 2-2

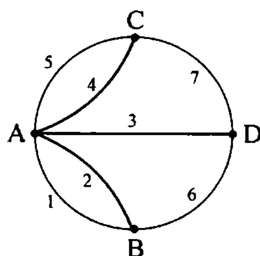


图 2-3

接着欧拉进一步探讨了这一笔画问题的结构和特征。一笔画有一个起点和一个终点,它们重合时称为封闭图形,否则称为开放图形。除起点和终点外,一笔画中间可能出现一些曲线的交点,在这些交点处曲线一进一出,因此通过的曲线总是偶数条,这些交点就称为“偶点”,由此看来,只有起点和终点通过的曲线可能是奇数条,此起点和终点称为“奇点”,特别地,当起点和终点重合时,便成为一个偶点,不再是奇点。

正是经过上面的探究,欧拉断言:任何一个一笔画,要么没有“奇点”,要么有两个“奇点”,而在“七桥问题”所对应的图形中,四个点都是“奇

点”，因此它不能一笔画成，从而人们不可能不重复地一次走过哥尼斯堡的七座桥。

欧拉没有满足于“七桥问题”的解决，而是继续深入研究，终于用严密的数学语言证明了一个可鉴别任一图形能否一笔画的“一笔画定理”：一个网络（任意一个由有限条弧线构成的图形，且每条弧线都有两个相异的端点）是一笔画，当且仅当该网络是连通的，并且奇顶点的个数是 0 或 2。

欧拉解决这一问题所用的思维方法，就是抽象方法，即由感性认识到理性抽象，再由理性抽象上升到理性认识，这也是人们认识事物常用的一种抽象思维方法。“七桥问题”有力地说明，数学抽象将实际关系中许多无关紧要的东西（如桥的大小、形状之类）舍掉，而紧紧抓住其中带有本质特征的东西，从而构造出一些在逻辑上无矛盾的“纯粹的”数学关系。

1. 数学抽象的概念

数学抽象是抽象方法在数学中的具体运用，也就是利用抽象方法把大量生动的关于现实世界空间形式和数量关系的直观背景材料进行去伪存真、由此及彼、由表及里的加工和制作，提炼数学概念，构造数学模型，建立数学理论。

2. 数学抽象的特点

（1）数学抽象的特殊内容

数学只是量的科学，如 1 头牛，1 只羊。

（2）数学抽象的特殊高度

和一般的自然科学相比，数学抽象的另一特点在于它所达到的高度，数学的抽象程度远远超过了自然科学中的一般抽象。

首先，数学抽象往往是在其他学科抽象基础上的再抽象。例如，正比例函数是物理学中匀速直线运动和简谐运动的再抽象。

其次，数学抽象具有逐级抽象的特点。更为重要的是，数学抽象的特殊高度表现在数学中一些概念与真实世界的距离是如此遥远以致常常被看成“思维的自由想象物和创造物”，这即为数学中所谓的“理想元素”（如无穷远点）。

（3）数学抽象的特殊方法

数学抽象就是一种建构的活动，数学的研究对象是通过逻辑建构活

动来构造的。

3. 数学抽象的基本方法

(1)理想化抽象

在纯粹理想的状态下,对事物进行简单化与完善化的加工处理,撇开事物的具体内容,排除次要的、偶然的因素,聚合事物的一般的、本质的属性,抽象出相应数学内容的方法。

(2)强抽象与弱抽象

强抽象是指在已知概念中,加强对某一属性的限制,抽象出作为原概念特例的新概念的方法,即通过扩大原概念的内涵来建立新概念的抽象方法。

例如,从四边形概念出发,从两组对边给予适当限制,则得平行四边形和梯形的概念。

若从平行四边形概念出发,再对边或角分别适当限制,又得到矩形、菱形及正方形的概念。

弱抽象是指在已知概念中,减弱对某一属性的限制,抽象出比原概念更为广泛的新概念,使原概念成为新概念的特例的方法,即通过缩小原概念的内涵来建立新概念的抽象方法。

例如,从全等三角形的概念出发,借助弱抽象就可获得相似形与等积形的概念,它们分别保留了“形状相同”及“面积相等”的特性。

(3)等置抽象

从一类对象(具体的或抽象的个体)中抽象出其中的某种共同属性的抽象方法。

例如,自然数的概念就是用等置抽象的思想建立起来的。每个自然数实际上都是一类等价集合的标记,它反映这类集合中元素的数目是该类集合的类的标记,反映这类集合中元素的数目是该类集合的类的特征。

(4)存在性抽象

先用假设的方法肯定抽象出来的数学概念存在性,并由此发展出一定的数学理论,然后在理论和实践中加以验证,从而确认新的数学理论的合理性。

例如,自然数“无限延伸”以及无理数、负数、虚数都是由存在性抽象

方法建立起来的。

[例 2-1]　自然数集合{n}是经过三个层次抽象而成的，被称为三度抽象物。古人在生产实践中，用“结绳记数”的方法，由计算个别具体数量而得到个别自然数 1，2 等概念。这是第一步抽象。第二步，人们从个别自然数中发现进行“加一”的运算可以得到后继数，这样无限制地运算下去就得到无限序列：1，2，…，n，…　这就抽象出了一般的任意自然数 n 的概念。第三步，从无限序列：1，2，…，n，…发现，每一个自然数都具有相同的特征，根据 Cantor 的“概括原则”，抽象出一切自然数能构成无穷集合{n}，从而形成了自然数集合的概念。

二、“化归”的方法

所谓“化归”，是把未知的问题转化为已知的问题，把待解决的问题归结为已解决的问题，从而解决问题的过程。这是数学工作者解决问题常见的思路和方法。数学家波利亚用一个关于“烧水”的浅显例子，把“化归”的数学方法解释得非常明白，他说：“给你一个煤气灶，一个水龙头，一盒火柴，一个空水壶，让你烧一满壶开水，你应该怎么做?”你于是回答：“把空水壶放到水龙头下，打开水笼头，灌满一壶水，再把水壶放到煤气灶上，划着火柴，点燃煤气灶，把一满壶水烧开。”他说：“对，这个问题解决得很好。现在再问你一个问题：给你一个煤气灶，一个水龙头，一盒火柴，一个已装了半壶水的水壶，让你烧一满壶开水，你又应该怎么做?”然后波利亚说：“物理学家这时的回答是：可以把装了半壶水的壶放到水龙头下，打开水龙头，灌成一满壶水，再把水壶放到煤气灶上，划着火柴，点燃煤气灶，把一满壶水烧开。但是数学家的回答却是：把装了半壶水的水壶倒空，就化归为刚才已解决的问题了。”

对照待解决的问题与前面那个已解决的问题，条件只有“装了半壶水的水壶”与“空水壶”的差别，需要完成的任务都是“烧一满壶开水”。所以，只要把“装了半壶水的水壶”的条件转化为“空水壶”的条件，这个待解决的问题就“化归”为已解决的问题了。

读者仔细想想，在探究和解决数学问题的时候，自己是不是也曾多次用过这种“化归”的方法？这种方法，体现了数学家思维的简洁和经济。

看到这里，读者如果能够具体地举例，说说自己过去在解决哪个数学问题时，用到过“化归”的方法，一定会有更大的收获，这样，读者就真正理解并记住了“化归”的方法，并且使之转化为自身的数学素养，今后也会自觉地运用“化归”的方法了。

三、观察和实验

观察和实验（又称尝试，对数学学科似称尝试更适合），是发现与解决问题的最形象、最具体的手段之一。在一般的科学活动中，观察与实验是极为重要的科学方法。观察与实验是收集科学事实，获取科学研究第一手材料的重要途径，是形成、论证及检验科学理论的最基本的实践活动。然而，长期以来，有人认为数学是高度抽象和逻辑性极强的学科，不需形象和具体的思考和操作，推理证明才是数学的主旋律。事实上，这种印象是片面的，越是抽象和复杂就越需要形象和具体的辅助与配合。观察与实验在数学的整个发展过程中起着重要的作用，在数学教学中也应给予充分的重视。

观察法是指人们对周围世界客观事物和现象在其自然条件下，按照客观事物本身存在的实际情况，研究和确定它们的性质和关系，从而获得经验材料的一种方法。

欧拉说过：“数学这门学科，需要观察还需要实验。”实验是人们根据一定的研究目的，利用仪器或工具对周围世界的客观事物与现象进行人为的控制、模仿，排除干扰，突出主要因素，在最有利的条件下考察和研究它们的性质和关系，从而获得经验材料的一种方法。

20世纪最伟大的数学家冯·诺依曼（L. J. von Neumann）指出“大多数最好的数学灵感来源于经验”，从数学发展的意义上来说，数学作为一种源于社会实践的理性构造的学科，当它远离实践的经验之源而发展时，就会逐渐分化成为众多而又无前途的支流。唯一的解决方法就是使其回到本源，返老还童。这种观念，是数学家对数学的一种本质认识。

在数学研究中，通过观察与实验不仅可以收集新材料、获得新知识，而且常常导致数学的发现与理论的创新。观察与实验方法在数学中的运用可以大体分为两个层次：一、运用观察和实验来验证数学理论；二、运用

观察和实验方法来解决具体的数学问题。

在数学史上，有大量的例子能说明在数学中如何通过观察与实验来发现新的事实、得到新的成果。几何学主要是研究空间物体、图形的形状和大小等性质的学科，在其中，观察和实验的色彩就更为浓烈。在几何学的发展进程中，实验的或者说经验的几何是其中的一个重要阶段。

尺规作图一直是一个实验的过程，人类会作三边形、正五边形和正十二边形，但是在作正七边形、正十一边形和正十七边形时却遇到了极大的困难。这个历史难题被高斯在大学一年级时就解决了。当高斯告诉他的老师时，据说老师不相信竟把高斯赶出了家门。高斯不仅在实验的基础上完成了正十七边形的尺规作图，而且还进一步证明了这个定理：凡边数为费马素数（即 $2^{2^n}+1$ 为素数）的正多边形可用尺规作图，当边数是素数但不是费马素数时，这样的正多边形不能用尺规作出。高斯的成功，不仅在于解决了正十七边形的尺规作图，更为奇妙的是，他把 $2^{2^n}+1$ 形的数与正多边形的尺规作图联系了起来。

中国古代有一个计算圆弓形的面积公式，这个公式发现于《九章算术》中。在图 2-4 中，c 表示圆弓形的弦，s 表示从弓形的弦的中点到弓形的弧的中点的距离。由弓形的弧的中点引两条割线，与 c 的延长线相交，使得两延长部分都等于 s 的一半。通过目测可知圆弓形的面积近似地等于由 c 所在的直线与两条割线围成的等腰三角形的面积。假设这两个面积完全相等，我们便得到了中国古代计算圆弓形的面积公式 $A=s(c+s)/2$，通过这个公式，我们不难推得，计算公式相当于 $\pi=3$。

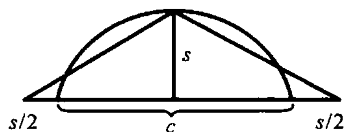


图 2-4

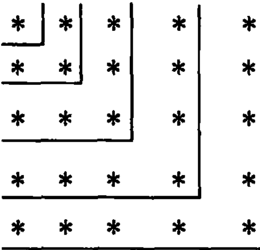
在日常生活中，数学观察与实验主要被用来观察实际生活中存在的数量问题、空间结构问题。比如作简单的几何图形，观察几何图形的相互位置，从这些观察中自己动手去做、去实践，并得出一些数学结论。

20 世纪电子计算机的发展，为数学的实验提供了更多的可能，实验的过程是探索的过程，是发现的过程。数学工作者可以在计算机上做过去只有笔和纸的时代连想都不敢想的事情，“四色问题”的解答就是一个很好的例子。

在研究计算圆锥体积公式的教学中，我们常常通过这样的实验作为发现结论的过程，将圆锥内装满水或沙子，然后倒入等底等高的圆柱内，我们通过实验能够发现两者体积之间的关系。

再如，在探讨球的表面积时，可作如下实验：在一个木制圆盘的中心竖直地钉上一个钉子，再将一个与圆盘的半径相同的木制半球的顶部也钉上一个钉子。现在，把一根粗绳子的一端系在木制圆盘的钉子上，并且围绕着钉子缠绕细的绳子，围着木球的钉子缠绕起来，直到盖满木球为止，再量所用绳子的长度。比较两次绳子所用长度，将会发现，后者非常接近地等于前者的两倍，重复这样的实验，结果总是基本相同。由此，可以猜测有这样的结论：该半球的表面积是圆盘的面积的 2 倍，或者一个球的面积等于其球大圆面积的 4 倍。

在数学教学中，实验的内涵和形式应该是很丰富的，拼剪图形、折纸是研究几何图形性质的很好的实验形式。而观察则是探求规律、寻找关系的好方法。如观察图 2-5，它可以看成是由 n^2 个点组成的方阵，以大小不同的正方形分成组：$1,4,9,\cdots,n^2$，观察相邻的两组之间有如下关系：$n^2+(2n+1)=(n+1)^2$。


图 2-5

如果令 $2n+1=m^2$，那么

$$n=\frac{m^2-1}{2},n+1=\frac{m^2+1}{2}$$

则有 $m^2+\left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2$。

上面的式子与毕达哥拉斯定理的形式相同，称 $m^2,\frac{m^2-1}{2},\frac{m^2+1}{2}$ 为一组毕达哥拉斯数，上面观察图形及分析的过程实际上就是毕达哥拉斯数产生的过程。

200 年前，德国数学家歌德巴赫（G. Goldbach）提出了一个命题："凡大于 4 的偶数都可以表示成两个素数的和。"由于这个命题至今还未能证明，人们称之为"歌德巴赫猜想"，它的发现完全来自于观察。

研究偶然性问题的概率论与研究确定性问题的平面几何本来是两个不同的数学分支，但是，数学家蒲丰（G. L. L. Buffon，1707—1788）却用随机投针的方法去求圆周率 π。1777 年的某一天，蒲丰把一些朋友请到家

里。他事先在一张大白纸上画好了一条条等距离的平行线，又拿出许多质量均匀、长度为平行线间距离一半的小针，请客人把针一根一根随意地扔到白纸上，如图 2-6 所示。蒲丰则在旁边计数，结果共投了 2212 次，其中与平行线相交的有 704 次。蒲丰随即用 2212 除以 704，得 2212/704 ≈3.142。然后说，这就是圆周率的近似值。

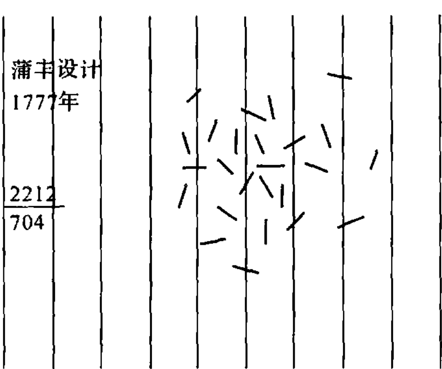


图 2-6

这一试验让客人震惊，然而它却有数学依据。计算 π 的值，是确定性问题；投针，却是随机性的方法。蒲丰成功地用随机性的方法解决确定性的问题，这反映了不同数学分支间内在的联系，反映了数学的“统一美”。

客观世界是纷繁复杂的，客观事物是多种多样的，但是，表面上看起来完全不同的事物之间，却可能存在着深刻的内在联系，在不同的事物之间找到联系，就是创新，找到联系的事物之间差异越大，创新也就越大。别人没有找到联系，你能找到联系，就是你的过人之处。

蒲丰投针试验，首创用偶然性方法作确定性计算，其意义十分重大，现在用几何概率的知识能够证明，用“蒲丰投针”的方法计算 π 是正确的。圆周率可以用随机试验的方法求得，在人们的意料之外，也让我们体会到数学的“奇异美”。

裴波那契数列有许多有趣的性质，这些性质是通过对兔子繁殖问题的观察与实验的基础上得到的。

[例 2-2] 兔子繁殖问题

13 世纪初，意大利数学家裴波那契（L. Fibonacci）在他所著的《算盘书》中提出了一个十分有趣的题目：

“有一个人把一对小兔子放在四面都围着的地方，他想知道一年以后总共有多少对兔子。假定一对小兔子经过一个月以后就长大成为一对大兔子，而一对大兔子经过一个月就不多不少恰好生一对小兔子（一雌一雄），并且这些生下的小兔子都不死。”

这是一个算术问题，但是用普通的算术公式是难以计算的，为了寻求兔子繁殖的规律，我们引进记号：

1——表示已长大成熟的一对大兔子；

0——表示未成熟的一对小兔子；

用 F_n 表示在 n 月 1 日总共有兔子的对数，用 $F_n^{(大)}$，$F_n^{(小)}$ 分别表示 n 月 1 日大兔子的对数和小兔子的对数，则通过观察有：

$F_1=1, F_2=1, F_3=2, F_4=3, F_5=5, F_6=8, F_7=13, \cdots$

经过进一步的观察，兔子的繁殖规律可列成下表：

n	1	2	3	4	5	6	7
$F_n^{(大)}$	0	1	1	2	3	5	8
$F_n^{(小)}$	1	0	1	1	2	3	5
F_n	1	1	2	3	5	8	13

由此表可得：

$$F_n = F_{(n+1)}^{(大)} \qquad （用实箭头表示）$$

$$F_n^{(大)} = F_{n+1}^{(小)} \qquad （用虚箭头表示）$$

进一步考虑，又可得：

(1)当 $n\geqslant$时，由 $F_n, F_n^{(大)}, F_n^{(小)}$ 的定义，有

$$F_n = F_n^{(大)} + F_n^{(小)}$$

$$F_n = F_{n+1}^{(大)}, F_n^{(大)} = F_{n+1}^{(小)}$$

(2)当 $n\geqslant 3$ 时，由(1)得

$$\begin{aligned} F_n &= F_n^{(大)} + F_n^{(小)} \\ &= F_{n-1} + F_{n-1}^{(大)} \\ &= F_{n-1} + F_{n-1} \end{aligned}$$

由以上观察和归纳所得的结果，我们知道当 $n\geqslant 3$ 时，通过 $F_1=F_2=1$ 和 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$便可计算出 F_n 的值。

显然，上面的结果纯粹是建立在观察和实验的基础之上的，是否带有普遍意义，亦即对一切 $n\geqslant 3, n\in \mathbf{N}$ 结论是否成立，还需要进行严格论证。但是，这个结果的确给我们带来了解决一般问题的曙光，我们有理由猜想

兔子的繁殖规律可以用一个明确的递推关系来描述，即

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}, n\geqslant 3, n\in \mathbf{N} \qquad ①$$

正如当代最著名的数学教育家波利亚(G. Polya)所说："数学家好似自然科学家，在他用一个新观察到的现象来检验一个所猜想的一般规律时，他向自然界提出问题：'我猜想这规律是真的，它真的成立吗？'假如结果被实验明确证实，那就有某些迹象说明这个规律可能是真实的，自然界可以给你是或非的回答。"对于递推关系式①，其正确性是肯定的，这可以用数学归纳法加以证明，后人为纪念兔子繁殖问题的提出人，将数列$\{F_n\}$称为裴波那契数列，这个数列的每一项都叫做裴波那契数。裴波那契数列在数学、物理、化学、天文等学科中经常出现，并且有许多有趣的性质。由于裴波那契数列可用于优选法，因而近年来有越来越多的人去研究它。

观察与实践的方法，是强调参与和实践的方法，它也可以为解题做些准备。在数学学习和数学教学中，应当学会利用观察与实验来帮助数学公式、定理的证明。例如，关于多面体顶点数 V、面数 E、棱数 F 关系的欧拉公式：$E+V-F=2$，就可以通过观察和实验说明或证明它的正确性。

四、类比与猜想

类比是根据两个数学对象的一些属性相同或相似，猜测另一些属性也可能相同或相似的思维方法。类比分为简单类比和复杂类比两类。

简单类比是一种形式性类比，它具有明显性、直接性的特征，其模式为

对象 A 具有属性 a、b、c，

对象 B 具有属性 a'、b'，

猜测　对象 B 具有属性 c'。

比如，由一元二次方程必有两个根(实根或复根)的事实，猜测：一元三次方程很有可能有三个实根或复根。

复杂类比是一种实质性类比，需要通过较为深入的分析后才能得出新的猜测，其模式为

H 蕴含 A，

H 蕴含 B，B 真，

猜测　A 可能真。

类比是发现问题和解决问题的一种常用思维形式。在数学中，常用的类比包括平面与空间的类比、数与形的类比、有限与无限的类比等。两个数学对象结构相似，是类比的出发点和关键。

[例 2-2]　对于如下两个命题：

(1)若 x、$y\in\mathbf{R}$，则 $x^2+y^2>2xy$。

(2)在平面内，若两直线被三条平行线所截，则截得的对应线段成比例。

通过类比，可以得到两个新的命题：

(1′)若 x、y、$z\in\mathbf{R}$，x、y、$z\geqslant 0$，则 $x^3+y^3+z^3\geqslant 3xyz$。

(2′)在空间，若两直线被三个平行平面所截，则截得的对应线段成比例。

[例 2-3]　解方程组 $\begin{cases}x+y+z=3,\\ x^2+y^2+z^2=3,\\ x^3+y^3+z^3=3。\end{cases}$

分析　降低未知数的次数，同时减少未知数的个数，得到类比方程组

$$\begin{cases}x+y=2\\ x^2+y^2=2\end{cases}$$

该方程组用韦达定理来解较简单，因为 $xy=\frac{1}{2}[(x+y)^2-(x^2+y^2)]=1$，所以 x、y 是一元二次方程 $t^2-2t+1=0$ 的根，从而得 $x=y=1$。现将此方法类比到原方程组，x、y、z 应是某个一元三次方程的三个根，设法找出这个一元三次方程。因为 $xy+yz+zx=\frac{1}{2}[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)]=3$，又 $(x+y)(y+z)(z+x)=\frac{1}{3}[(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)]=8$，即 $(3-z)(3-x)(3-y)=8$，得 $27-9(x+y+z)+3(xy+yz+zx)-xyz=8$，由此解得 $xyz=1$，于是由韦达定理知 x、y、z 是方程 $t^3-3t^2+3t-1=0$ 的根，解得 $x=y=z=1$。

猜想往往伴随着类比、归纳的思维过程。由于类比和不完全归纳所得的结论不一定正确，因此，猜想的数学命题或结论应当采用严格的方法去证明它，或者用实例反驳它。

五、归纳与演绎

归纳是通过对某类数学对象中若干特殊情况的分析得出一般性结论的思维方式。归纳分为不完全归纳和完全归纳两种类型。

设 $M_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是待研究的对象 M 的特例或子集，若 M_i 具有性质 P，由此猜想 M 也可能具有性质 P，即

$$\bigcup_{i=1}^{n} M_i \subseteq M \wedge P(M_i) \rightarrow P(M)$$

当 $\bigcup_{i=1}^{n} M_i = M$ 时，称为完全归纳法；当 $\bigcup_{i=1}^{n} M_i \subset M$ 时，称为不完全归纳法。前者属于数学证明的方法，后者是数学发现中常用的方法。

完全归纳法也称枚举法，它是根据每一个 $M_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均具有某种属性而推出 M 也具有这种属性，因而所得到的结论必定正确。例如，用圆内接三角形证明正弦定理，应分锐角、直角和钝角三角形这三种情况讨论，最后归纳出对任意三角形，都有 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，其中 R 是 $\triangle ABC$ 外接圆的半径。

不完全归纳法仅考察了事物的部分对象就得出了关于事物的一般结论，因此结论带有猜测成分。前提与结论之间的联系就不一定真实、可靠，所得的猜想还必须经过严格的论证。但是这一方法的主要意义在于发现问题，是数学创造性思维的一种基本方法，同时它在数学解题中发挥着启发思路的重要作用。

演绎是由一般性前提推出特殊性结论的思维方法。通常，依据已知的事实或真命题去进行推理的方式都是演绎推理。演绎推理是数学证明中最常用的严格推理形式，它对于训练学生的技能技巧，发展学生的逻辑思维能力均有重要的作用。

在解决数学问题时，归纳与演绎两种思维方法往往交替出现，由归纳法去猜测问题的结论或猜测解决问题的方法，再用演绎去完成严格的推理证明。

六、分析与综合

分析法是指要证明一个命题是正确的，思考问题时可以由结论向已知条件逐步追溯。也就是说，先假设命题的结论成立，推出它成立的原因，再把这些原因看成新的结论，推求使它们成立的原因，如此逐步往上追溯，直到推出已知条件或已知的事实为止。简述之，就是执果索因。像这样的思维方法叫做“分析法”。分析法的基本模式是“结论$\Leftarrow\cdots\Leftarrow$已知”。

如果在追溯过程中，每一步都是可逆的(就是任何相邻的两个论断都是互为充要条件的，或者说是等价的)，那么这样的分析法我们还称之为“逆证法”。

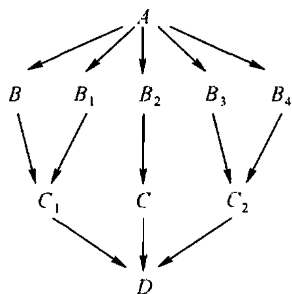


图 2-7

分析法的思考顺序与综合法相反，如图 2-7 所示，如欲证“若 A 则 D，是从 D 出发，逐步上溯，寻求 D 成立的原因(如 C,C_1,C_2)，而后再寻求 C,C_1C_2 成立的原因(如 B,B_1,B_2,B_3,B_4)，如果其中之一如 B 成立的原因恰好为已知条件 A，于是便得到命题的推论途径“$D\Leftarrow C\Leftarrow B\Leftarrow A$”。分析法思考的方向是比较明确的，是中学阶段分析证题常用的一种方法。

分析法与结合法比较，其优点是执果索因，思维目标较为清晰，思路也较为集中，易有成效，比较容易找到问题解决的途径。缺点是叙述不易得当，分析者知道怎么回事情，但很难完整表述出来。

分析是在认识上把事物的整体分解成各个部分、个别特性或个别方面。综合是在认识上把事物的各个部分或不同特性、不同方面结合起来。

思考题：

1. 举例说明数学思想方法在科学中的应用。
2. 试举例说明数学思想方法在科学进步中的作用。
3. 举例说明常见的数学思想方法有哪些。
4. 数学抽象方法有哪些？对生活有什么意义？

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

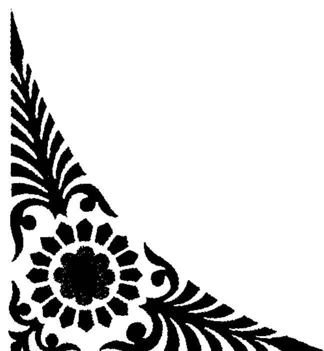
第三章

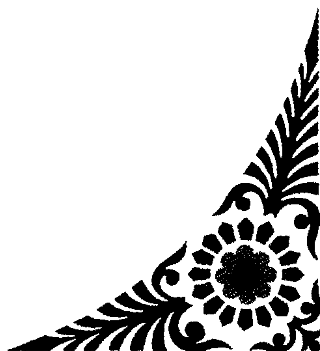
数学悖论与数学危机

数学的创作绝不是单靠推论可以得到的，首先通常是一些模糊的猜测，揣摩着可能的推广，接着下了不十分有把握的结论，然后整理想法，直到看出事实的端倪，往往还要费好大的劲儿，才能将一切付诸逻辑式的证明。这过程并不是一蹴可几的，要经过许多失败、挫折，一再地猜测、揣摩，在试探中白花掉几个月的时间是常有的。

——哈尔莫斯

数学悖论是数学发展过程中一个重要的存在形态，它的出现，本来并没有引起人们的重视，可是 19 世纪 90 年代以来，由于数学基础学科集合论中出现的悖论，才开始引起数学家的注意。为了排除数学悖论，20 世纪初形成了三大学派，从而推动了 20 世纪数学的发展。本章就数学悖论的含义，数学悖论与三次数学危机的关系，以及数学基础的三大学派作一概括性的介绍。





第一节　数学悖论

一、悖论的定义

悖论本意含有悖理的意义，即认为与信念相违背的。笼统地说，悖论是指这样的推理过程：它看上去是合理的，但结果却得出了逻辑矛盾。

关于悖论的定义，有各种不同的说法，徐利治教授主张采用弗兰克尔和巴-希勒尔的说法较合理。弗兰克尔和巴-希勒尔（Fraenkel 和 Bar-Hillel）在《集合论基础》中给出了如下的定义：如果某一理论的公理看上去是真实的，它的推理规则看上去也是有效的，但在该理论中却证明了两个互相矛盾的命题，或者证明了这样一个复合命题，它表现为两个互相矛盾的命题的等价式，那么，就说这个理论是包含悖论的。

这个定义中明确了如下三点：①悖论总是相对于某一理论而言的；②一个悖论可以表现为某一理论中两个互相矛盾的命题的形式；③悖论也可集中地表现为肯定等价于否定的复合命题。

所谓悖论与一定的历史条件相联系，与人们在相应的历史条件下的认识水平密切相关，其实质在于悖论是相对于特定的理论体系而言的。面对悖论，人们也就努力去探索或建立新的理论，使之既不损坏原有理论的精华，又能消除悖论。因此，客观上悖论推动了理论的研究和发展。数学中的悖论推动了数学的发展。

二、历史上一些重要的悖论

关于悖论的起源问题，早在古希腊就出现了。下面我们举些常见的悖论。

1. 芝诺悖论

公元前 400 多年，古希腊埃利亚学派巴门尼德的门徒芝诺（Zeno of Elea，约公元前 490—约公元前 430 年）大约创设了 40 个悖论，流传下来

的有 8 个，其中用来反对赫拉克利特的流动说，以维护埃利亚学派的静止说，与有关运动的 4 个悖论最有名，这四个悖论是：

二分法悖论：提出这一悖论的目的在于否定运动的存在，其理由是："在你穿过一段距离之前，必先穿过这个距离的一半。"意思是说从 A 点出发，为了通过 AB，必须先到达 AB 的中点 C，为了到达 C，必先到达 AC 的中点 D。如此无限继续下去，以至这种运动永远不能开始。

阿基里斯悖论："跑得最快的阿基里斯永远追不上爬得最慢的乌龟。"意思是说甲跑的速度远大于乙，但乙比甲先行了一段距离，甲为了赶上乙，必须超过乙开始的 A 点，但甲到了 A 点，则乙已进到 A_1 点，而当甲到 A_1 点，则乙又进到 A_2 点。如此继续下去，以至于甲永远也追不上乙。

飞箭静止悖论："飞着的箭是静止的。"因为，如果每一件东西在占据一个与它自身相等的空间时是静止的，而飞着的东西在任何一定的瞬间总是占据一个与它自身相等的空间，那么它就不能动了。

运动场(stadium)悖论："一半时间和整个时间相等。"如图 3-1 所示，假设有三列物体，其中的一列{A}是静止的，当其他二列{B}、{C}以相等的速度做相反方向运动时，在它们都走过同样的一段距离的时间中，B 越过 A 列物体的数目，要比它越过 C 列物体的数目少一半。因此它用来越过 A 列的时间要比它越过 C 列的时间短一半，但是 B 和 C 用来走 A 的位置的时间都是相等的。所以整个的时间等于一半的时间。

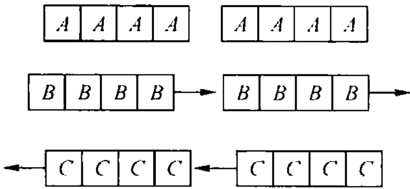


图 3-1

芝诺悖论是似而非，经验告诉人们，运动是客观存在的；直觉也告诉人们，阿基里斯赶上乌龟不费吹灰之力。但芝诺的论证又无懈可击，那么，问题出在什么地方呢？人们发现，芝诺所有的悖论都是建立在空间和时间可以无限分割这一假说基础之上的，如果抛弃了这一可分性，芝诺悖论将不再成立。

2. 伽利略悖论

由于主观认识上的错误而造成的悖论就不是推理看上去好像是合理的问题，而是传统观念貌似事实的事了。例如伽利略悖论就属于这类悖论。

1638 年，伽利略指出如下事实：

如果在正整数和正整数的平方数之间建立如图 3-2 所示的一一对应：

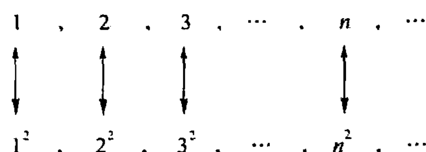


图 3-2

这样一来，整体和部分就相等了。但是，人们的传统观念总认为“整体是大于部分的”，却不知道这只能适用于有限量，而不能应用于无穷量，因此，上述论证就被看成是一个悖论。这就是伽利略悖论。

3. 说谎悖论

公元前 6 世纪，古希腊克里特岛的哲学家伊壁门尼德斯有如下断言：“所有的克里特人所说的每一句话都是谎言。”

试问这句话是真还是假。如果它是真，由于伊壁门尼德斯本人也是克里特岛人，从而可推出它假。因之，由它为真可导致它为假。反之，由它为假，并不导致任何矛盾。但是，经过公元 4 世纪欧布里德的改进，就变成了下面的悖论：

撒谎者悖论：“我现在所说的是假话。”

如果这句话为真，则可推出它为假。反之，由它的假，可导致它为真。这就构成了悖论。但是这样一个前提太强，给人的感觉是在人为地制造悖论。后来，人们构造了等价于撒谎者悖论的强化了的撒谎者悖论，即“永恒性撒谎者悖论”，现陈述如下：

由于上述除了这句话本身之外别无它话，因此，若该话为真，则要承认说话之结论，从而推出该话为假。反之，若该话为假，则应肯定该话结论的反面为真，从而推出该话为真。这个悖论的症结在于作论断的话与被论断的话混而为一。要排除这种悖论在于语言的分层，这正是语义学

所研究的内容。这类悖论称为“语义学悖论”。它是指这样一种悖论：“对于这种悖论的构造来说，像‘表明’、‘描述’、‘真’等这样一些语义项是必不可少的。”此外，这类悖论的构造中还必须进行语义的分析。

4. 逻辑-数学悖论

仅借以逻辑和数学的符号而得以构造的悖论就叫做“逻辑-数学悖论”，它主要包括布拉里-福蒂悖论、康托尔悖论和罗素悖论。

1897年意大利数学家布拉里-福蒂在超穷序列理论中得到一个悖论，这就是布拉里-福蒂悖论，这个悖论的内容为：序数按照它们的自然顺序，形成一个良序集。这个良序集合根据定义也有一个序数Ω，这个序数Ω由定义应该属于这个良序集。可是由序数的定义，序数序列中任何一段的序数要大于这段之内的任何序数，因此，Ω应该比任何序数都大，从而不属于这个良序集，矛盾。

在1899年，康托尔发现一个悖论，人们叫作康托尔悖论，现叙述如下：

依据基数理论可证明：任何集合 M 的基数$\overline{\overline{M}}$小于集合 M 的幂集 $P(M)$的基数$\overline{\overline{P(M)}}$，即$\overline{\overline{M}}<\overline{\overline{P(M)}}$。这一事实在集合论中称康托尔定理。

根据集合论的概括原则，可有一切集合所组成的集合 S。由康托尔定理知$\overline{\overline{S}}<\overline{\overline{P(M)}}$；但又可证 $P(S)$是 S 的子集，故又有$\overline{\overline{P(S)}}<\overline{\overline{S}}$，矛盾。这就是康托尔悖论。

1902年，英国著名哲学家、逻辑学家B. 罗素提出一个最有影响的悖论，现在叙述如下：

由于对于任一集合都可以考虑其是否属于自身的问题，因此依据概括原则，就可从谓词“不属于自身”出发去构造出一个新的集合 S_0，它是由所有那些不属于自身的集合所组成的，即 $S_0=\{x|x\notin x\}$。

由于 S_0 也是集合，因此又可进而考虑 S_0 是否属于自身的问题。依据排中律，这时必然有 $S_0\in S_0$，则由 S_0 的定义就可知 S_0 不属于自身，即 $S_0\notin S_0$，这是自相矛盾的。

而如果 $S_0\notin S_0$，则由于 S_0 不属于自身，由 S_0 的定义可知 S_0 属于 S_0，即 $S_0\in S_0$，这又是自相矛盾的。

于是，不论哪种说法都避免不了矛盾，这就是罗素悖论。1919年罗

素又把他提出的这一悖论通俗化为如下的理发师悖论：

萨魏尔村有一位理发师，他给自己立了一条规则：他只给村子里自己不给自己刮胡子的人刮胡子。

请问：这位理发师该不该给自己刮胡子？

如果他不给自己刮胡子，那么，他属于"自己不给自己刮胡子"的那一类村民，按约定，他必须给自己刮胡子。反之，如果他给自己刮胡子，那么他属于"自己给自己刮胡子"的那一类村民，按约定，他决不应该给自己刮胡子。

不论哪种说法，都导致矛盾，这就是理发师悖论。

不仅在数学基础的集合论中存在悖论，在其他数学学科如概率、统计中也都存在悖论。在其他非数学学科如天文学和现代物理中，关于时空的悖论更为广泛和复杂，这里我们就不一一列举了。

第二节 数学危机

数学基础包含了哲学、方法论和逻辑三方面的问题，对它们的研究，现在已经发展成为一门关于"数学真理的性质和依据"的重要数学分支。实际上，它包括了数学概念、数学理论的构成，数学证明的方法和依据，数学理论的真理性。

所谓数学危机，是源自那些威胁到整个数学基础的矛盾，或者说是人们对数学基础理论的一种普遍危机感。在数学中存在着各种各样的矛盾，如正与负、有理数和无理数、有限与无限、连续与离散、积分与微分等等。整个数学发展史贯穿着矛盾的斗争与解放。而当矛盾达到白热化以致于影响数学基础时就产生了数学危机。悖论在数学基础理论中出现，就是矛盾出现白热化，从而冲击了人们的传统观念，引起了普遍的危机感。这种危机感在数学史上出现了三次。

一、"毕达哥拉斯悖论"与第一次数学危机

数学史上第一次数学危机发生在古希腊时期，导致这一危机的直接

原因是不可公度线段的出现。

1. 第一次数学危机产生的经过

公元前5世纪，古希腊的毕达哥拉斯(Pythagoras)学派的希帕索斯，发现了等腰直角三角形的直角边与斜边不可通约。这本来是人类对数认识的一次重大飞跃，是数学史上的伟大发现，但由于毕达哥拉斯学派被自己的哲学偏见所禁锢，使他们陷入极度不安的深渊之中。这一发现不仅对毕氏学派的学说是致命的损害，而且对人们当时的见解也是极大的冲击。

当时，人们刚刚由自然数扩充到有理数，根据经验完全确信"一切量都可以用有理数表示"。这也就是说，在任何精度范围内的任何量，都可以表示成有理数，这在希腊当时，是人们的一种普通信仰，这是毕达哥拉斯学派的基本信条。因此，按照毕达哥拉斯学派的这种信条，不可公度的线段是不可能存在的。但是，另一方面，可以证明正方形的对角线和边长就是不可公度的线段，矛盾。这就形成了一个悖论，这一悖论人们叫作毕达哥拉斯悖论。这一悖论触犯了毕达哥拉斯的根本信条，因此在当时它就直接导致了认识上的"危机"，从而产生了数学第一次危机。

相传，希帕索斯的科学发现，不但没有获得应有的奖赏，反而被他们的同伙抛进大海，给予"淹死"的惩罚。希帕索斯为发现真理而献出了宝贵的生命，成为第一次数学危机的殉葬品。但是希帕索斯的发现却是淹不死的，它以顽强的生命力被广为流传，迫使人们去认识和理解自然数及其比值不能包括一切几何量。

2. 第一次数学危机的产物——公理几何与逻辑的诞生

因为整数实际上是表示离散的量，而可公度比实际上也是站在把每个量看作是单位量的离散的集合的基础上表示两个离散量的关系。但是现实的量除了离散的量，还存在着连续的量，这就是不可公度比产生的原因。由此看来，毕达哥拉斯悖论是由于主观认识上的错误而造成的。他们没有认识到"一切数量都是可以归结为整数比"的结论的相对性，因此，使这一结论与$\sqrt{2}$的无理性的证明就构成了矛盾，即形成了毕达哥拉斯悖论。

古希腊著名哲学家亚里士多德在《分析论前书》中给出了$\sqrt{2}$是无理数的

证明。

假设$\sqrt{2}$是有理数，则可设$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$（$\frac{p}{q}$是既约分数），

式子两边平方，则有 $2=\frac{p^2}{q^2}$，即 $p^2=2q^2$，

对这个式子简单讨论一下：因为式子右边是偶数，所以显见 p 为偶数。而 p、q 都是偶数，这与$\frac{p}{q}$为既约分数矛盾。因而假设错误，于是我们证明了$\sqrt{2}$是无理数。

希帕索斯的发现，一方面促使人们进一步去认识和理解无理数，另一方面导致了公理几何学和古典逻辑的诞生。几何量不能完全由整数及其比表示。反之，数都可以由几何量表示。整数受人尊崇的地位动摇了。几何学开始在希腊数学中占有特殊地位。同时也反映出，直觉和经验不一定靠得住，推理证明才是可靠的。从此希腊人开始重视几何的演绎推理，并由此建立了几何的公理体系。这是数学思想上的一次巨大革命。同时也迫使毕达哥拉斯学派提出原子概念去解决毕达哥拉斯悖论。但是这又引起了芝诺的悖论。所以，毕达哥拉斯悖论连同芝诺悖论一起构成了第一次数学危机。

芝诺悖论产生的症结在于把量的离散性与连续性的对立统一先割裂开来，过分强调矛盾的一方，然后再把矛盾的双方机械地联系起来。两分法悖论片面强调“空间无限可分性”上。箭的悖论突出地表现在那种就一个孤立的点来考虑箭的运动的片面强调上。

二、“贝克莱悖论”与第二次数学危机

1. 第二次数学危机产生的经过

微积分，作为人类思维的伟大成果之一，诞生于 17 世纪，完善于 19 世纪。微积分思想是与许多概念连在一起的，如连续、极限、无限（无穷大、无穷小）等。当毕达哥拉斯学派在发现不可公度量的存在时，他们已经面对了“离散与连续的关系”这一难题。

数学史上把 18 世纪微积分诞生以来在数学界出现的混乱局面叫做数学的第二次危机。17 世纪建立起来的微积分理论在实践中取得了成

功的应用。大部分数学家对于这一理论的可靠性深信不移;但是,当时的微积分理论主要是建立在无穷小分析之上的,而无穷小分析后来证明是包含逻辑矛盾的。这就是所谓的"贝克莱悖论"。粗略说,贝克莱悖论可以表述为"无穷小量究竟是否为 0"的问题:就无穷小量的实际应用而言,它必须既是 0,又不是 0;但从形式逻辑的角度看,这无疑是一个矛盾。详言之,我们通过下面的例子来叙述。

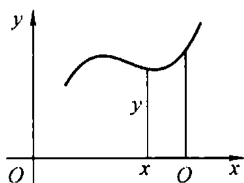


图 3-3

1696 年,牛顿在他所著的小册子《运用无穷多项方程的分析学》中,有如下一题:

已知如图 3-3 所示一条曲线 y,曲线下的面积为 z,且

$$z = ax^m \tag{1}$$

x 变化,得到无穷小增量"o",牛顿称为"瞬",则 z 的增量为

$$z + oy = a(x + o)^m = a\left(x^m + mox^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}o^2x^{m-2} + \cdots + o^m\right) \tag{2}$$

(2)式－(1)式得

$$oy = maox^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}ao^2x^{m-2} + \cdots + ao^m \tag{3}$$

(3)式除以无穷小量 o,得

$$y = amx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}aox^{m-2} + \cdots + ao^{m-1} \tag{4}$$

在(4)式中舍去含有无穷小增量 o 的项,得

$$y = max^{m-1} \tag{5}$$

(5)式说明,面积在 x 点的变化率是曲线在 x 处的 y 的值;反之,如果曲线是 $y=max^{m-1}$,那么在它下面的面积 $z=ax^m$。这也说明求面积与求它的变化率的过程是可逆的。这是微积分的基本定理。

从上述牛顿推导过程来看,把 x 变为 $x+o$,因而 ax^m 变为 $a(x+o)^m$,接着应用二项式定理予以展开,再用 o 除等式两边,这只有假定 o 不为零时,(3)式才能变成(4)式,这就是说 o 应不为零。然而由(4)式得(5)式,o 又应该是零,否则,是不能随便去掉等式(3)等号右边第二项之后那些项。

正由于在无穷小方法中包含这一矛盾，早在1694年，荷兰数学家纽文蒂就对无穷小量的应用提出了指责。1734年英国大主教贝克莱在他著的《分析学家》的小册子中，指责更加厉害，他说牛顿先认为无穷小量不是零，然后又让它等于零，这违背了背反律。他说牛顿所得的变化率实质上是$\frac{0}{0}$，它既不是有限量，也不是无穷小量，但又不是“无”，只不过是“消失了量的鬼魂”。贝克莱对微积分的激烈攻击，是出于他的政治目的，他极端恐惧于当时自然科学的发展所造成的对宗教信仰的日益增长的威胁，但当时的微积分理论也的确没有一个牢固的基础。由于分析领域中的一个一个成就不断涌现，但与这个相对照的却是由于基础的含糊不清所导致的矛盾愈来愈尖锐，这就迫使数学家认真清除贝克莱悖论，从而开始了柯西-魏尔斯特的微积分理论的奠基时代。

贝克莱悖论的症结在于无穷小量的辩证性与数学方法的形式特性的矛盾的集中表现。无穷小量是极限为零的变量，说它是零，是指它是运动、变化过程的终结，而所谓它是非零，是指它是过程的起点，但在数学中又必须要求对象的明确性和一义性，这是数学的形式逻辑方法所决定的，而数学方法这种形式逻辑的特性就决定了无穷小量的辩证性不可能直接在数学中得到表现。为了在数学中处理无穷小量，这实质上就是通过过程来把握结果，因此，无穷小量方法在实际应用中是有效的。但是，割裂开来的对立双方被推向极端，片面夸大到绝对、僵化的程度，再把它们机械地联结起来，悖论的出现就不可避免了。

2. 第二次数学危机的产物——分析基础理论的完善与集合论的创立

为了解决第二次数学危机，数学家们做了大量的工作，其中柯西是起着承前启后作用的人。他把趋于极限的，特别是趋于极限零的变量概念作为微积分的起点，从而把极限原理和无穷小量、无穷大量原理综合起来。他是按如下线索来展开微积分的：

变量、函数→变量的极限→无穷小量、无穷大量→函数的连续性概念→导数的定义等等。

起着关键作用的是极限概念，其定义为：

当一个变量逐次所取的值无限趋近于一个定值，最终使变量的值和该定值之差要多么小就有多么小，这个定值就叫做所有其他值的极限。

柯西用无穷小的极限来定义连续性，用极限和无穷小量来定义连续函数的导数，而无穷小量是用极限来定义的，这样一来，柯西把微积分理论的基础完全建筑在"极限"之上。对极限概念给出了比较"严密"的数学形式的定义，从而使微积分有一个初步的能为大多数数学家所接受的逻辑基础。但在柯西的极限定义中，尚有许多不严格的地方，例如："无限趋近"、"想要多么小就多么小"、"一个变量趋于它的极限"等之类的话不是严格的逻辑叙述，而是依靠了运动、几何直观的东西。

在柯西的思想中，函数不会直接趋于极限，而必须经过含有无限小的表达式，他把无限小量视为极限论的令人满意的基础。在他的证明过程中，既包括无穷小量，又含有极限。柯西一方面排除了无穷小量的形而上学的绝对存在，而在某些情况下，他又把无穷小量当作某种独立量来使用，允许无穷小量参加运算，没有完全用极限来代替无穷小量。

柯西的极限论是一种潜无限。所谓潜无限，就是把无限作为一种变化着、成长着、被不断地产生出来的东西来解释，它永远处在构造中，永远没有完成。它是一种潜在的，而不是一种实在的。极限还是一种实无限。所谓实无限，是把无限集合的整体本身作为一个现成的单位来考虑，它是已经构造完成了的东西。

魏尔斯特拉斯进一步改进了柯西的工作，把微积分奠基于算术概念的基础上。他认为"一个变量趋于一个极限"的说法还留有运动观念的痕迹，如果把一个变量简单地解释为一个字母，让字母代表它可以取值的集合中的任何一个数，这样一来，运动的观念就不见了。魏尔斯特拉斯用$\varepsilon—\delta$语言来给函数极限的定义作了精确的阐述。现将其叙述如下：

$\forall\varepsilon>0$，存在一个正数δ，使得对于区间$|x-x_0|<\delta$内的所有x，都有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则$f(x)$在$x=x_0$处有极限A。

把极限理论建立在$\varepsilon—\delta$准则之上就使极限理论精确化了。在上述定义中，$f(x)$事实上就代表了一个潜无限的过程，而A则是这一过程的结果，即实无限性的表现。因此，所谓$\varepsilon—\delta$准则，实质上就是过程和结果之间的联系的反映，而依据这一准则，我们就可以通过对过程的分析来把握相应的结果。而这种动态过程是通过$\varepsilon—\delta$这种静态的有限量为路标来刻画的。恩格斯曾说，运动应当从它的反面即从静止找到它的量度，用

$\varepsilon-\delta$ 方法定义函数的极限，实质上就是用相对稳定的方式来描述一个变量的运动变化情况。这具体反映在 ε 的任意给定上。给定反映了运动的相对稳定性，它静态描述了函数 $f(x)$ 的特征，但是 ε 又是任意的。我们可以取 ε 的一系列趋于零的正数，这一系列的"静态"描述恰好反映了函数 $f(x)$ 的"动态"特性。正如放电影一样，一系列动态画面使人有动态的感觉。

由于在严格的极限理论中，极限是作为一种"定义对象"出现的，而不再被看成是相应结果的直接表现，因此，过程与结果之间的联系就被切断了。这样一来，作为一个单独从过程来考察的极限理论，就不再包含任何直接的矛盾，而无穷小量则完全排除掉了。

魏尔斯特拉斯用排除无穷小量的办法来解决贝克莱悖论，而到 20 世纪 60 年代，鲁滨逊又把无穷小量请了回来，引进了超实数的概念，从而建立了非标准分析，同样也能精确描述微积分，进而也解决了贝克莱悖论。但我们必须注意，无论是极限理论，还是非标准分析，它们的相容性都没有得到证明，因为它们的无矛盾性归结为实数理论的无矛盾性，而实数理论的无矛盾性又依赖于集合论的无矛盾性，但集合论的无矛盾性至今并没有彻底解决。因此，所谓贝克莱悖论已得到解决，只是在一定条件下得到了相对意义下的解决，像贝克莱悖论这样的悖论得到绝对的解决是不可能的。

由于第二次数学危机，促使数学家深入探讨数学分析的基础——实数理论。19 世纪 70 年代初，魏尔斯特拉斯、康托尔、戴德金等人独立地建立了实数理论。而极限理论又是建立在实数理论的基础上，从而使数学分析奠定在严格的实数理论的基础上，并进而导致集合论的诞生。

三、集合论悖论与第三次数学危机

1. 第三次数学危机产生的经过

19 世纪下半叶，康托尔创立了著名的集合论，在集合论刚产生时，曾遭到许多人的猛烈攻击。但不久这一开创性成果就为广大数学家所接受了，并且获得广泛而高度的赞誉。数学家们发现，从自然数与康托尔集合论出发可建立起整个数学大厦，因而集合论成为现代数学的基石。"一切

数学成果可建立在集合论基础上。”这一发现使数学家们为之陶醉。1900年于巴黎召开的国际数学会议上，大数学家彭加勒宣称：“数学的严格性，看来直到今天才可以说是实现了。”事实上，当时的数学界是喜气洋洋，一片乐观。

可是，好景不长。在彭加勒胜利宣告数学的严格性已实现还不到两年，一个震惊数学界的消息传出：集合论有漏洞！这就是英国数学家罗素提出的著名的罗素悖论。

1903年，英国逻辑学家、哲学家罗素宣布了一条惊人的消息：集合论是自相矛盾的，没有相容性！这就是罗素在集合中发现的矛盾，数学史家称为罗素悖论。由于这一新发现，使刚刚平静的数学界，又掀起了“轩然大波”。当罗素把这一消息告诉德国数学家弗雷格时，使弗雷格大为伤心，他说：“一个科学家所遇到的最不合心意的事，莫过于是在他的工作即将结束时其基础崩溃了，罗素先生的一封信正好把我置于这个境地。”整个数学界也为之大震，使好多大数学家大惊失色，不知所措。在罗素提出悖论之前，已出现了布拉里-福蒂最大序数悖论和康托尔最大基数悖论，可是由于这两个悖论涉及的概念较多，没引起大家的注意，而罗素悖论则不同，它清楚明晰，涉及的概念又极少，于是集合论本身含有矛盾的事实大白于世。

其实，在罗素之前集合论中就已经发现了最大基数悖论。如1897年，布拉利和福蒂提出了最大序数悖论。1899年，康托尔自己发现了最大基数悖论。但是，由于这两个悖论都涉及集合中许多复杂理论，所以只是在数学界激起了一点小涟漪，未能引起大的注意。罗素悖论则不同，它非常浅显易懂，而且涉及的只是集合论中最基本的东西。所以，罗素悖论一提出就在当时的数学界与逻辑学界内引起了极大震动。戴德金也因此推迟了他的《什么是数的本质和作用》一文的再版。可以说，这一悖论就像在平静的数学水面上投下了一块巨石，而它所引起的巨大反响导致了第三次数学危机。

为什么罗素悖论使整个数学界大受震动呢？这是因为它不仅涉及集合论中最基本的概念“集合”，而且还涉及集合论中经常使用的一个基本原则。只要承认并使用这个原则和过程，则牵一发而动全身，数学中许多

原有结论就失效了。直到现在，这仍是数学界特别是数理逻辑学界一个争议极大的问题。集合悖论的出现引起了数学界的争论，同时又伴随出现了尖锐的哲学思想的论争。这就是一般称作的第三次数学危机。

2. 第三次数学危机的产物——数理逻辑的发展与一批现代数学的产生

罗素认为解决集合悖论的关键在确定这样的条件，在这种条件下，使相应的集合存在。罗素指出了分析这种条件的三种可能方向："量性限制理论"、"曲折理论"、"非集合理论"。后来悖论研究基本上按着罗素所指引的方向前进。

由德国数学家 E. 策墨罗等人发展起来的公理集合化，可以视作量性限制理论的一个具体体现。策墨罗认为，悖论的出现是由于使用了太大的集合，因此必须对康托尔的朴素集合论加以限制，限制到足以排除悖论，同时要保留这个理论所有价值的东西。策墨罗等人研究的结果就是集合论中所谓的 ZF 系统。在这个系统中能把布拉里-福蒂悖论、康托尔悖论等予以排除。如果在 ZF 系统中再加上选择公理，就构成 ZFC 系统，只要这个系统无矛盾，那么严格的微积分理论就能在 ZFC 公理集合论上建立起来。然而 ZFC 系统本身是否有矛盾至今还没有得到证明。

为了排除集合悖论，策墨罗等人用公理集合论致力于集合论的改造，罗素等人用类型论致力于集合论的改造，这是两个主要的改造方案。除此之外，数学家在实践中还提出了另一些可排除悖论的方法，这里我们就不再详述了。

作为对罗素悖论的研究与分析的一个间接结果就是哥德尔获得的如下不完备性定理：

如果形式算术系统是无矛盾的，则存在着这样一个命题，该命题与其否定在该系统中都不能证明，亦即它是不完备的。

这一定理是数理逻辑发展史上的重大研究成果，是数学与逻辑发展史上的一个里程碑。获得这一结果，正是分析悖论中获得方法上的启发，可见从方法论角度来看悖论的研究确有重大的意义。数学基础、逻辑学、语言学和哲学的研究都与悖论的研究有直接的关系。因此对悖论问题的研究有着重要意义。

本节简单地介绍了数学史上由于数学悖论而导致的三次数学危机与

渡过，从中我们不难看到数学悖论在推动数学发展中的巨大作用。有人说："提出问题就是解决问题的一半。"而数学悖论提出的正是让数学家无法回避的问题。它对数学说："解决我，不然我将吞掉你的体系！"悖论的出现逼迫数学家投入最大的热情去解决它。而在解决悖论的过程中，各种理论也应运而生：第一次数学危机促成了公理几何与逻辑的诞生；第二次数学危机促成了分析基础理论的完善与集合论的创立；第三次数学危机促成了数理逻辑的发展与一批现代数学的产生。

第三节　数学基础的三大学派

什么是数学基础？要给出一个严格的确切定义是比较困难的，不过我们把纯数学研究中的如何由某个基本的数学理论出发去展开出其他的数学理论和由此引起的数学可靠性的哲学分析，可以看作数学基础研究的对象，也许是符合它的形成和发展历史的。围绕着数学基础之争，形成了现代数学史上著名的三大数学流派，而各派的工作又都促进了数学的大发展等。

从 20 世纪初到 20 世纪 30 年代左右，由于集合悖论的发现，使许多数学家卷入一场大辩论之中。他们看到这次数学危机动摇了数学大厦的根基，因此必须对数学基础进行严密的考察。原来还不十分明显的意见分歧扩展成为学派之争，相应于数学是什么这个问题的回答，数学基础从它诞生开始便分成了三大哲学流派，这就是以罗素为代表的逻辑派，以布劳威为代表的直觉派，以希尔伯特为代表的形式公理派。

一、逻辑派

逻辑派的主要代表人物是罗素和弗雷格。他们的主要宗旨是试图把数学还原为逻辑，也就是把数学纳入逻辑学的范畴，从少量的逻辑概念出发，去定义出全部的数学概念；从少量的逻辑命题出发，去演绎出全部的数学定理。

1. 逻辑派的产生

逻辑派的思想萌芽，可追溯至莱布尼兹，但他本人并没有做具体工作。弗雷格在研究算术公理化时发现：所有的算术概念都可以借助于逻辑概念来定义，所有的算术法则也都可以借助于逻辑法则来证明，从而弗雷格逐渐形成了数学还原为逻辑的观点。他的研究成果发表在《算术基础》和《算术的基本定理》中。罗素在吸收前人成果的基础上，采用了皮亚诺的自然数公理系统来作为自己的基础研究的出发点，于 1903 年完成了他的《数学的原理》，第一次系统地介绍了自己用逻辑来推算出的数学成果。1910—1913 年，罗素与怀特海合著了《数学原理》，完整和更为详细并从公理出发，借助符号逻辑的手段把数学加以严格的处理。

2. 逻辑派的失败

在《数学原理》中，并没有把数学还原为逻辑。罗素和怀特海在定义无穷基数时，不得不加一条"无穷公理"，不然就不能定义出自然数全体和无理数，就无法建立一个超穷数理论和实数理论。在证明"非归纳数必定是自反数"时又必须引进选择公理，否则，有很多数学定理就不成立，而"无穷公理"和"选择公理"都不是逻辑公理。另外，在用类型论来处理分析中的问题时，为了避免复杂性，他们又引进了"可化归公理"。由于这一公理随意性很大，因此受到众人的反对。所以逻辑派将数学还原为逻辑的企图不得不以失败而告终。逻辑派之所以失败，最根本的原因在于过分夸大数学与逻辑之间的同一性，而将数学与逻辑之间质的区别完全抹杀了。我们说数学与逻辑既有它的同一性，又有它们之间的差别性。它们的同一性首先表现在相互依赖上。数学离不开逻辑，如数学中的公理化方法实质上就是逻辑方法在数学中的直接应用，在公理系统中所有的命题和有关概念都是逻辑地联系起来的。另一方面，数学也促进了逻辑的发展，由传统逻辑向数理逻辑的演进正是数学方法的应用结果。其次，数学与逻辑的同一性表现在两者的共同特性上，这种共同特性最重要的在于它们研究对象的高度抽象性。数学与逻辑的差异性主要表现在研究对象不同上，尽管它们都是抽象的，但抽象的内容不同，逻辑是研究如何单纯地依据语句的逻辑结构去解决推理的有效性问题。而数学舍弃了事物质的属性，从量的侧面研究客观世界的量的规律性。

3. 逻辑派的贡献

尽管逻辑派的数学哲学观是错误的，但他们在数学研究方面的贡献还是应该肯定的，这主要表现在：

（1）由于弗雷格、罗素等逻辑学派学者的工作，形式逻辑基本上实现了从传统逻辑到数理逻辑的发展；

（2）《数学原理》已相当成功地把古典数学纳入了一个统一的公理系统，这就为公理化方法的近代发展奠定了一个必要的基础；

（3）罗素的类型论对于排除悖论具有重要的意义。

二、直觉派

直觉派的主要代表人物是布劳威，其宗旨是以“直觉上的可构造性”作为“可信性”的标准对全部已有数学进行彻底的审查和改造。

1. 直觉派的产生

直觉派认为，集合论悖论决不是偶然现象，它是整个数学所感染的疾病的一种症状，因此，悖论问题不可能通过对已有数学作某些局部的修改和限制来加以解决，而必须依据可信性标准对已有数学作全面审视和改造。那么什么样的概念和方法才是可信的呢？在直觉派看来这就是“直觉上的可构造性”。直觉派有句著名的口号是“存在必须被构造”。这就是说，数学中的概念和方法都必须是构造性的。非构造性的证明是直觉主义者所不能接受的。直觉主义者所说的“直觉”并不是指主体对于客观事物的一种直接把握的能力，而指思维的本能，是一种心智活动。直觉派把数学建立在自然数理论基础之上。而自然数理论在他们看来，是直接建立在原始数学直觉之上的，从而也就不需要其他的基础了。所谓原始直觉就是一个人某一时刻集中注意某一对象，紧接着又集中注意另一对象，这就形成了数 1，2，接着由构造法形成 3，4 等等，如此构造下去就可以产生出任何一个自然数。为了进一步展开直觉派数学，布劳威又依构造性的标准建立实数理论。

2. 直觉派的失败

直觉派由“存在必须被构造”的原则出发，对古典逻辑中的排中律、双重否定律等相当一部分原则持排斥态度，对古典数学中的非构造性的结

论采取否定态度,对数学中的实无限的对象和方法采取不承认的态度,从而也就抛弃了相当多的数学理论。这是因为直觉派并没有按照他们的目标来重建古典数学。直觉派建立起来的直觉数学与古典数学相比,有很多地方显得非常烦琐,也并不直观,因此按照直觉派的观点来重建数学是失败的。直觉派重建数学失败的症结在于他们完全否定数学的客观性。否定非构造性数学和传统逻辑是行不通的。由于直觉派在本质上是主观的和荒谬的,因此,他们以直觉上的可构造性为由来绝对地肯定直觉派数学也就必定是不正确的。离开实践就不可能真正解决数学理论的可靠性。

3. 直觉派的贡献

直觉派的数学哲学理论观点在总体上是错误的,但他们所进行的具体数学工作至今在计算机科学中有着重大的现实意义。

三、形式公理派

形式公理派的创始人是希尔伯特。希尔伯特规划是他在数学基础问题上的数学观的主要体现,他提出了两条最本原则:①形式主义原则;②有限主义原则。

1. 形式公理派的产生

数学的主要工作是证明。为了解决悖论问题,希尔伯特指出:只要证明了数学理论的无矛盾性,那么悖论自然就永远被排除了。在 1922 年汉堡的一次会议上,希尔伯特提出了数学基础研究的具体规划,这就是首先将数学理论组织成形式系统,然后用有限的方法证明这一系统的无矛盾性。这里所说的形式系统就是形式公理化,所谓的一个数学理论的形式公理化,就是要纯化掉数学对象的一切与形式无关的内容和解释,使数学能从一组公理出发,构成一个纯形式的演绎系统。在这个系统中那些作为出发点的命题就是公理或基本假设,而其余一切命题或定理都能遵循某些假定形式规定与符号逻辑法则逐个地推演出来。

在希尔伯特看来,可信性只存在于有限之中,而对于无限的任何涉及都是不可靠的。为了确保数学的可靠性,希尔伯特把数学划分为“真实数学”和“理想数学”两大类。凡涉及实无限概念和超穷推理方法的数学都

被称为理想数学，其余的均为真实数学。把理想数学组织成形式系统，然后证明其不矛盾性。这样就使无限的思想成分的应用与有限性的观点获得统一，从而也就解决了数学基础问题。

2. 形式公理派的失败

1931年哥德尔公布了“不完备性定理”，这一定理使“希尔伯特规划”归于失败。“希尔伯特规划”之所以失败就在于他在基础研究中坚持的立场是错误的。他完全否认了无限概念和方法的客观意义，过分夸大了形式研究的作用。事实上，数学的真理性并不存在于形式系统的严格证明中，而归根结底要在与物质世界联系的实践过程中去验证。

3. 形式公理派的贡献

尽管“希尔伯特规划”失败了，但他们对数学的发展还是做出了重要贡献，这主要表现在以下几个方面：

(1)由希尔伯特奠定的形式化研究方法有广泛的应用价值，具有重大的方法论意义。

(2)希尔伯特在进行形式公理化研究时涉及作为研究对象的系统(称之为对象系统)，而对“对象系统”进行研究时所用到的数学理论，即“元数学”，亦即形式化研究导致“元数学”的产生。把数学证明作为对象进行研究就产生了“证明论”。证明论这种新兴数学分支的产生，正是希尔伯特致力于其规划的结果，其意义在于使数学研究达到了一个新的高度。

思考题：

1. 数学史上主要出现了哪些数学悖论？
2. 数学危机与数学悖论对数学发展有什么意义？



第四章

数学与物理学的发展

现代高能物理到了量子物理以后，有很多根本无法做实验，在家用纸笔来研究，这跟数学家想象的差不了多远，所以说数学在物理上有着不可思议的力量。

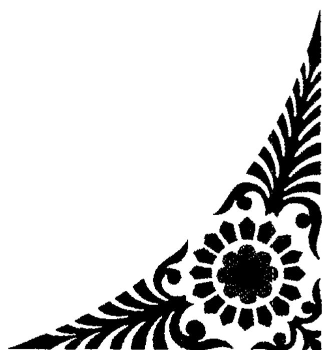
——丘成桐

思维自疑问和惊奇开始。

——亚里士多德

一位物理学家写道:“贯穿整个物理科学的曲折变化的历史,有一个仍然不变的因素,就是数学想象力的绝对重要性。每个世纪都有它特有的科学预见和它特有的数学风格。每个世纪物理科学的主要进展都是在经验的观察与纯数学的直觉相结合的引导下取得的。对于一个物理学家来说,数学不仅是计算的工具,也是得以创造新理论的概念和原理的主要源泉。”相对论和量子力学是现代物理学的核心领域,它们的建立与发展都与数学有密切关系。





第一节　数学与物理基本概述

一个世纪以前，迪昂在《物理学理论的结构》一文中开篇即明称“理论物理是数学物理学”。他接着说，到今天，健全心智几乎不可能再否认物理学理论应该用数学语言来表达。

霍金曾说：一个物理理论即是一个数学模型。我们还可以继续引用柯瓦雷，引用库恩，以至无穷。实际上差不多没有哪位物理学家或科学史家不认为数学化是近代科学的主要特征。

克莱因在《西方文化中的数学》一书的前言中即说：“在西方文明中，数学一直是一种主要的文化力量。”

库萨的尼古拉宣称，数是事物在造物主心中的第一模型。而罗吉尔·培根则相信大自然是用几何语言写成的。达·芬奇说：“欣赏我的作品的人，没有一个不是数学家。”罗吉尔·培根的话经伽利略重述而家喻户晓：“大自然这部书是用数学文字写成的。”在科学的数学化进程中，伽利略是转折点上的人物，因为他远不止表达了新兴科学家的一个基本思想，而是开始实现这一思想。开普勒宣称世界的真实性是由其数学关系构成的。笛卡儿明言他最热爱数学，他记述了他 1619 年 11 月 10 日的那个著名的梦，在梦中他得到真理的启示，从此要把整个物理学还原为几何体系。“给我运动和广延，我将构造出宇宙。”笛卡儿把物质世界还原为由长宽高三维构成的广延，这当然是因为广延是可以充分量化的。物体的运动归根到底是力的机械作用，真实的世界是一个可以用数学表达出来的在时空中运动的整体。整个宇宙是一架庞大的、和谐的、用数学设计而成的机器。

近代科学首先在天文学和天体力学领域发展起来，这一事实与天文现象、天体运动适合数学处理关系极大。

正是数学在天文学中的成功运用，鼓励牛顿把数学扩展到一切物体的运动中来。达朗贝尔等人则主张把力学看作是数学的一个分支。

从伽利略和牛顿开始，越来越多的自然现象得以用数学语言来成功地加以描述。一两个世纪以后，物理学整体上数学化了，"任何近代物理理论实质上是一个数学方程体系"。物理意义逐渐不再是必须询问的东西。克莱因说，对于这一点，"那些没有进入到（数学）这座现代德尔菲神秘之城的门外汉是不满意的，但是现在科学家已经学会接受了。的确，面对如此众多的自然界的神秘，科学家非常高兴把自己隐藏在数学符号之中"。

物理学与数学的关系密切，源远流长。历史上有许多著名科学家如牛顿、欧拉、高斯等，对于这两门科学都做出重要贡献。此风一直延伸到19世纪末20世纪初。当时的一些大数学家如庞加莱、克莱因（F. Klein）、希尔伯特等，尽管学术倾向不尽相同，但都精通理论物理。到20世纪前半段，数学与物理学开始有分道扬镳的趋势，双方之间的信息交流有所梗阻。但应看到，仍有不少有名的数学家如外尔（C. H. H. Weyl）、冯・诺伊曼、柯尔莫哥洛夫（A. N. Kolmogorov）等，对理论物理甚至具体物理问题感兴趣且做出贡献。但总的来看，抽象数学之风日益鼎盛，到20世纪中叶布尔巴基学派的问世而登峰造极。

当然，数学家埋首致力于自身学科的建设，本来是无可非议之事，但在两门学科之间存在一条难以逾越的鸿沟，却对双方都极为不利。物理学家往往希望多懂一些数学，苦于不得其门而入；而数学家则过于关注论证的严密性，对丰富多彩的物理世界视而不见，也难以理解。但是，物理学与数学之间毕竟存在深刻的内在联系，这种相互隔阂的情况不可能长期持续下去。

转机果然出现了。一方面是来自理论物理学的新发展。20世纪50年代初，杨振宁等提出的规范场论，赋予了微分几何中纤维丛这类相当抽象概念具体的物理意义，不啻是物理学与数学之间内在联系的见证。1990年，作为数学界最高荣誉的菲尔兹奖，破天荒地授予一位从事超弦理论研究的理论物理学家威滕（E. Witten），也是一种表明两大学科在重新靠拢的信号。另一方面是电子计算机发展的结果。它的发展得到了一些有远见的数学家如冯・诺伊曼、图灵（A. Turing）等的关注。计算机的高速发展，不仅在技术上成果累累，理论上也有其重要意义。过去物理学

所津津乐道的是运动方程式的可积问题，特别是可以用函数解析式来表示的问题（如谐振子、二体运动等），显示出对于运动状态高度精确的可预测性。经典物理是如此，量子物理也是如此。但可积问题只是少数特殊情况，多数问题是不可积的，由于数学上求解困难，只有数值计算的结果，因而对于这类问题的物理本质理解不透。计算机技术的进展，大大地促进了这一领域的发展，为现代非线性物理这一新学科分支奠定了基础。

第二节　数学发展史上与物理学进步有关的事件

数学和物理学从来是没有分开过的，就好比是父母和孩子一样。有人说哲学是科学的母亲，而数学是科学的父亲。在物理学的发展道路上，哲学起着指导性的作用，而数学对物理学起具体的作用。一个理论有没有生命力的基本条件就是数学表述是否正确完善，是否和物理学定律界定的条件配合得很好，或者和客观实验符合得很好。当这种符合度达到一定程度之后，物理学理论就会反过来赋予数学描述以生命力。

数学对于物理学的影响是很深远的，正因为数学的进步才促进着物理学的发展。

一、数学学科的发展对物理学的影响

1. 微积分的建立对经典力学的影响

17 世纪，随着资本主义的发展，迫切需要提高军事、航海和生产技术，从而推动着科学的进一步发展，在已经研究自由落体运动、抛物体运动、单摆运动以及天体运动等问题的基础上，有两个最基本的问题：一个是已知路程求速度，另一个是已知速度求路程，在匀速运动的情况下，这两个问题常用数学方法已经解决，但是宏观物体处于运动状态，位置与速度都在不断的变化中，要从数学上反映它们的数量关系，就要突破研究常量的传统范围，提供能够描述和研究物体运动及其变化过程的新工具。

微积分正适应当时的实际需要，在物理学（尤其是力学和天文学）的

推动下，在长期积累大量成果的基础上，由牛顿和莱布尼兹分别独自建立的。

在牛顿和莱布尼兹之间，为争论谁是这门学科的创立者的时候，竟然引起了一场轩然大波，这种争吵在各自的学生、支持者和数学家中持续了相当长的一段时间，造成了欧洲大陆的数学家和英国数学家的长期对立。英国数学在一个时期里闭关锁国，囿于民族偏见，过于拘泥在牛顿的“流数术”中停步不前，因而数学发展整整落后了 100 年。

牛顿和莱布尼兹对以往分散的努力加以综合，将自古希腊以来求解无限小问题的各种技巧统一为两类普通的算法——微分和积分，并确立了这两类运算的互逆关系，从而完成了微积分发明中最关键的一步，为近代科学发展尤其是物理学提供了最有效的工具，开辟了数学史上的一个新纪元。

微积分是近代数学中最伟大的成就，基本上近现代数学的每一个分支都要用到微积分的理论。而微积分的理论基础是极限，而极限的思想就是牛顿在研究物质运动的时候提出来的。在这以后的复变函数、积分变换、无穷级数等等，都成为研究物理学的有效描述工具。对于不同的体系和对象，我们所用到的数学工具是不相同的，有的是方法上的不同，有的则是知识体系的不同。例如在量子力学中，曾经就有三种描述的方式，薛定谔的波动方程，这是一种微分方程；海森堡的矩阵量子力学；狄拉克的高等量子力学，也就是相对论量子力学的描述方程。这三种表述的方式侧重点是不同的，但是都做到了同样的表述目的。而在凝聚态物理当中，我们更多地用到泛函分析。这些数学工具的理论基础有的是相同的，但有的不是。从这一点我们也可以看到，物理和数学之间的关系是一种相互影响，甚至是相互依存的关系。

微分几何的发展为经典力学注入了蒸蒸日上的生命力，是研究现代经典力学的主要数学工具。在日常经验范围中，采用经典力学可以计算出精确的结果。

2. 数学的发展对天体物理的影响

天体物理广泛采用的是数学研究方法。理论天体物理学的主要任务是阐明观测结果，目的是研究宇宙中观测到的天体结构，并研究其中所发

生的物理过程。天体物理学中的主要问题之一是恒星结构和演化的研究，因为存在于宇宙中的大部分物质集中于恒星。通常把恒星内部结构与恒星大气结构分开来进行研究。这些问题根据恒星的力学和平衡条件常表述为微分方程的形式。

18 世纪的天体研究采用了数学中近似的方法，成就是令人瞩目的。克莱洛(Alexis-Claude Clairaut)对哈雷彗星回归的预言证明了数学工作在天体上的精确性，这是最富有戏剧性的论据之一。有好几个人都曾观测过这颗彗星，哈雷在 1682 年曾试图测定出它的轨道，预言这颗彗星将于 1758 年返回。1758 年 11 月 14 日，在巴黎科学院的一次会议上，克莱洛宣布哈雷彗星将于 1759 年 4 月中旬返回到它的近日点，可能的误差是 30 天。这颗彗星比预料的早到了一个月，一个月的误差似乎很大，但是人们最多只能在几天中看到，而且这颗彗星 77 年才能见到一次。

天体研究中另一辉煌的成就应归功于拉格朗日和拉普拉斯的工作。人们观测到月球和行星的运动不很规则，这些不规则的运动可能意味着行星将越来越远离太阳或是移向太阳。拉格朗日和拉普拉斯证明了人们所观测到的木星和土星速度的不规则是周期性变化的，因而它们的运动基本上是稳定的。18 世纪的天体研究工作都收录在拉普拉斯恢宏的科学巨著《天体力学》中，这本书在 1799 到 1825 年间共出版了五卷。

拉普拉斯实际上将他的全部生命献给了天体物理学，他将他所涉猎的每一个数学分支都应用于天体的研究。众所周知的一个事实是，他在他的著作中经常省略一些困难的数学步骤，并且说："易知……"这说明他实际上对数学细节并无耐心，而只管应用。他对数学的许多基本贡献只是他在自然科学的伟大工作中的副产品。

人们所津津乐道且富有戏剧性的是海王星的发现。虽然海王星迟至 1846 年才发现，但是这一发现都是建立在 18 世纪数学工作的基础之上的。1781 年，赫谢耳(William Herscher)通过一个大功率的新式望远镜发现了天王星，但是天王星的轨迹与人们所预测的并不相符。于是，布瓦德(Alexis Bourard)提出这样一个假想：还有一颗未知的行星在干扰着天王星的运动。人们通过观测和计算这颗未知行星可能的大小和轨迹，以试图确定这颗行星的位置。1845 年，亚当斯(John Couch Adams)，剑桥



约翰·柯西·亚当斯
(1819—1892)

大学一个 26 岁的学生，对这颗假想的行星的质量、位置及轨道建立起数学模型和公式，并作了详细的估算，当得知这一工作时，格林尼治皇家天文台台长，著名的艾利(George Airy)爵士却对之不予理睬。但是另外一位年轻的天文学家、法国的列维利尔(Urhain J. J. Leverrier)也独立地推出了和亚当斯相同的结论，并给德国天文学家加勒(Johann Galle)寄去了一套如何找到这颗行星的位置的说明。加勒于 1846 年 9 月 23 日收到了这份资料并于当天晚上发现了海王星，其方位与列维利尔预测的结果相当接近。

海王星发现的经过，数学起着不可磨灭的作用。

3. 数学对电磁学的影响

法拉第是电磁场学说的创始人，但是法拉第的学说在理论上还不够严谨。作为实验大师，法拉第有许多过人的地方，唯独数学功夫不够，他的创见都是用直观形式表达的。一般的理论物理学家都不承认法拉第的学说，认为它不过是一些实验记录，麦克斯韦大约于 1855 年开始研究电磁学，在潜心研究了法拉第关于电磁学方面的新理论和思想之后，坚信法拉第的新理论包含着真理。于是他抱着给法拉第的理论“提供数学方法基础”的愿望，决心把法拉第的天才思想以清晰准确的数学形式表示出来。他在前人成就的基础上，对整个电磁现象作了系统、全面的研究，凭借他高深的数学造诣和丰富的想象力接连发表了电磁场理论的三篇论文，麦克斯韦发表的《论法拉第的力线》是他第一篇关于电磁学的论文。在论文中，麦克斯韦通过数学方法，把电流周围存在力线这个现象概括成一个高等数学中的矢量微分方程。根据这个方程，每一股电流都产生一条环状磁力线。

从理论上引出位移电流的概念，实在是电磁学上继法拉第电磁感应以后的一项重大突破。根据这个科学假设，麦克斯韦推导出两个高度抽象的微分方程式(方程式直到 1865 年才最后完善)，这就是著名的麦克斯

韦方程式。这组方程式，从两方面发展了法拉第的成就：一是位移电流，它表明不但变化着的磁场产生电场，而且变化着的电场也产生磁场；二是方程式不但完满地解释了电磁感应现象，而且还在理论上进行了总结，就是：凡是有磁场变化的地方，它的周围不管是导体或者电介质，都有感应电场存在。经过麦克斯韦创造性的总结，电磁现象的规律终于被他用不可动摇的数学形式揭示出来。电磁学到这时才开始成为一种科学的理论。



麦克斯韦（1831—1879）

高度抽象的麦克斯韦微分方程，单是两个公式、几个数学符号，就包罗了电荷、电流、电磁、光等自然界一切电磁现象的规律，这在一般人看来，确实是不可思议的，但正因如此才体现了数学的奥妙之处。

二、数学家对物理学的影响

牛顿把数学和物理学完美地结合在一起。牛顿是剑桥大学的数学教授，被称为最伟大的数学家之一，他还被誉为一个物理学家。他的工作提供了一整套新的科学方法，开创了科学的一个新纪元，并因之加强和深化了数学的作用。伽利略先于牛顿探讨了物体的下落和抛物体的飞行，牛顿却解答了一个更为深广的问题，一个 1650 年左右在科学家们脑海中占据最主要地位的问题：能否在伽利略的地上物体运动定律和开普勒的天体运动定律之间建立一种联系？所有运动现象都应遵循一套定律，这种想法似乎有点过于自信和不凡，但确实在 17 世纪严谨的数学家们的头脑中很自然地产生了。在实施推导宇宙运动规律的过程中，牛顿对代数、几何尤其是微积分做出了许多贡献，而这些仅仅是为达到其科学目标的



牛顿（1642—1727）

辅助工作。就天体运动来说，牛顿真正的成就在于他证明了开普勒经过多年观测和研究得出的开普勒三定律可以由万有引力定律和运动三定律用数学方法推导出来。牛顿用近似的方法，解决了许多有关月球运动的问题。例如，月球运动所在平面略微向地球运动平面倾斜，牛顿能够说明太阳、地球、月球三者之间的相互吸引而引起的这种现象遵循万有引力定律。在所有这些工作中，牛顿采纳伽利略的提议去寻求数学描述而不是物理解释。牛顿不仅将开普勒、伽利略、惠更斯的大量实验和理论性成果融汇起来，而且将数学描述和推导置于所有科学描述和预言之前。在他巧妙地命名为《自然哲学的数学原理》(1687 年)一书的序言中，他写道：古人(如帕普斯所告诉我们的)认为在研究自然事物时，力学最为重要，而今人们则舍弃其实体化的形式和深藏的实质，力图以数学定律说明自然现象。我在本书中致力于用数学来探讨有关的哲学问题。……因此我把这部著作称为哲学的数学原理，因为哲学的全部任务就在于从各种运动现象来研究各种自然之力，而后用这些力去推证其他现象。本书第一、第二篇中的一些普遍命题就是为了这个目的而提出来的。……然后根据其他同样是数学上论证过的命题，从这些力中推演了行星、彗星、月球和海潮的运动。很明显，数学在这里起了主要作用。

费马(Pierre de Fermat)作为数学巨擘之一，在相当有限的事实基础上证明了他的最少时间原理。该原理认为：光在从一点到另一点的过程中，总是选择所需时间最短的路径，显然光服从数学定律，还遵循最短路径。当费马成功地从史奈尔和笛卡儿先前发现的光的折射定律中得到这一原理时，他愈发相信他的原理的正确性了。

丹尼尔·贝努利、达兰贝尔、欧拉及拉格朗日，对乐音进行数学描述和分析，但在对其进行数学分析时，他们之间产生了严重分歧，直到 19 世纪初傅立叶的工作问世后，这种分歧才得以消除。

数学家莫帕图伊斯在进行光的理论的研究时，在他题为《迄今为止看起来似乎不相容的自然界不同法则的协调性》的论文中提出其著名的最小作用原理。他从费马的原理出发，但考虑到当时的一些不同见解，如光在水中的速度是否比在空气中大(笛卡儿和牛顿的观点)，或者比在空气中小(费马的观点)，摒弃了最少时间说法而代之以作用的概念。欧拉，18

世纪最伟大的数学家，在 1740 年至 1744 年间，他一直就这个话题与莫帕图伊斯通信。他用这样的话来表述他的坚信不疑："宇宙的结构是最完美的，它是一位最为睿智的创造者的杰作。所以，如果没有某种极大或极小的法则，那就根本不会发生任何事情。"欧拉的观点比莫帕图伊斯更进了一步，欧拉认为所有自然现象之所以表现如此，是因为它们要使某些函数达到极大或极小，因而，基本的物理原理应包括达到极大或极小的函数。

达朗贝尔，法国著名的数学家、物理学家。达朗贝尔认为力学应该是数学家的主要兴趣，所以他一生对力学也作了大量研究。达朗贝尔是 18 世纪为牛顿力学体系的建立做出卓越贡献的科学家之一。《动力学》是达朗贝尔最伟大的物理学著作。在这部书里，他提出了三大运动定律，第一定律是给出几何证明的惯性定律；第二定律是力的分析的平行四边形法则的数学证明；第三定律是用动量守恒来表示的平衡定律。书中还提出了达朗贝尔原理，它与牛顿第二定律相似，但它的发展在于可以把动力学问题转化为静力学问题处理，还可以用平面静力的方法分析刚体的平面运动，这一原理使一些力学问题的分析简单化，而且为分析力学的创立打下了基础。牛顿是最早开始系统研究流体力学的科学家，但达朗贝尔则为流体力学成为一门学科打下了基础。1752 年，达朗贝尔第一次用微分方程表示场，同时提出了著名的达朗贝尔原理——流体力学的一个原理，虽然这一原理存在一些问题，但是达朗贝尔第一次提出了流体速度和加速度分量的概念。达朗贝尔在力学和数学方面的研究推动了他对天文学的研究，他运用力学知识为天文学领域做出了重要贡献。

伽利略，意大利数学家、物理学家。伽利略专心致志于力学的研究，他首先研究了惯性运动和落体运动的规律，为牛顿第一定律和第二定律的研究铺平了道路。他坚持"自然科学书籍要用数学来写"的观点，倡导实验和理论计算相结合，用实验检验理论的推导。这种研究方法对以后的科学研究工作具有重大的指导意义。

高斯，德国数学家。24 岁开始，高斯放弃在纯数学方面的研究，进行了几年天体的研究，高斯自己独创了只要三次观察，就可以来计算星球轨道的方法。他可以极准确地预测行星的位置。1809 年他写了《天体运动理论》二册，第一册包含了微分方程、圆锥截痕和椭圆轨道，第二册展示了

如何估计行星的轨道。高斯为了用积分解天体运动的微分方程，他考虑无穷级数，并研究级数的收敛问题。在1812年，他研究了超几何级数并且把研究结果写成专题论文，呈给哥廷根皇家科学院。在1830到1840年间，高斯和一个比他小27岁的年轻物理学家——韦伯（Withelm Weber）一起从事磁的研究，他们的合作是很理想的：韦伯做实验，高斯研究理论，韦伯引起高斯对物理问题的兴趣，而高斯用数学工具处理物理问题，影响韦伯的思考工作方法。

欧拉，瑞士数学家。欧拉不但为数学界做出贡献，更把数学推至几乎整个物理的领域。在18世纪中叶，欧拉和其他数学家在解决物理方面的问题过程中，创立了微分方程学。其中，在常微分方程方面，他完整地解决了n阶常系数线性齐次方程的问题，对于非齐次方程，他提出了一种降低方程阶的解法；而在偏微分方程方面，欧拉从二维物体振动问题归结出了一、二、三维波动方程的解法。

三、经典力学的奠基

1. 天体力学

德国著名天文学家、数学家开普勒（Jokipler，1571—1630）受毕达哥拉斯学派中理性主义的影响，认为哥白尼日心体系中所表现出的简洁的几何秩序与和谐的数字关系，正反映了数学理性主义思想。于是，他把自己的毕生精力投入到完善日心说理论的研究中。他利用第谷·布拉赫（Tycho Brahe，1546—1601）长达20年观测行星运动的精确记录，进行计算后发现：按日心说中行星运行的轨道为正圆所算出的数值与第谷的观测数据相差8弧分。开普勒坚信第谷数据的精确性，并按第谷的数据发现行星运行的轨道是椭圆形，从而建立了行星第一运动定律：所有行星分别在大小不同的椭圆轨道上运行，太阳位于这些椭圆的一个焦点上。为了指出某行星在某一具体时间所处的位置，开普勒经过一系列计算，发现行星运行线速度有变化，又大胆否定了天体按匀速运行的传统观念，提出了行星运动第二定律：在相等的时间间隔内，行星和太阳的连线在任何地点沿轨道所扫过的面积相等。1609年，开普勒把这两条定律写进《新天文学》一书中并发表。此后，他又用了9年的时间寻找行星之间及行星与

太阳之间的关系，终于在各种数据中发现了行星运动第三定律：太阳系中任何两颗行星公转周期的平方与其轨道半径的立方成正比，即 $T^2=R^3$（T：运行周期；R：轨道半径）。开普勒的行星运动三定律，正确地描绘了行星运动的轨迹、时间、速度及与太阳的关系，揭示了天体的基本运动规律，为天体力学的诞生提供了坚实的基础，因此，开普勒获得“天空的立法者”的美誉。

2. 运动力学

与开普勒同期的伽利略（Galileo Galilei，1564—1642）是意大利著名的天文学家和实验物理学家。他开创了近代科学的实验研究方法，强调科学认识必须来自观察和实验，并接受实验的验证。他除了用自制的天文望远镜给日心说提供了一系列确凿的证据外，还用自己设计制造的试验仪器，否定了被宗教奉为权威的亚里士多德运动学思想，揭示了地面物体运动的基本定律。1604 年，伽利略设计了斜面实验，以求冲淡重力，定量地观察自由落体速度变化的规律性。他让一小球从斜面顶端沿槽滚下，记下倾斜度和球从木板的顶端到底部所需要的时间，并不断改变倾斜度，进行反复实验。最后发现，物体沿同一高度，从不同倾斜度的斜面到达底端时，所用的时间相同，末速度也相同。由此，伽利略总结了自由落体定律：物体下落的速度与时间成正比，它下落的距离与时间的平方成正比。证明亚里士多德的下落物体的速度与重量有关的结论是错误的。伽利略在斜面实验中还发现，小球从斜面滚下之后，接着可以滚上另一斜面，达到原来出发点的高度。假如把第二个斜面放平，小球将以匀速沿直线方向继续滚下去，从而揭示了力是产生加速度的原因，并导出当物体不受外力作用时，运动的物体做匀速直线运动的惯性原理。这样又纠正了亚里士多德的力是产生物体速度的原因的错误观点。有了自由落体定律和匀速直线运动的概念，伽利略又发现抛物体运动是由两种运动合成的，一种是垂直向下的自由落体运动，一种是水平方向的匀速直线运动．从而证明亚里士多德所说的一个物体不能同时有两种以上运动的结论也是错误的。伽利略在运动力学上的一系列开创性工作，挣脱了亚里士多德运动学思想对物理学的束缚，把近代物理学推上了历史舞台，因而，被誉为近代的“物理学之父”。

四、经典力学体系的形成

1. 牛顿三大定律

牛顿(I. Newton,1643—1727)在著名的《自然哲学的数学原理》一书中,给出了一种力的定义,大意是:施加的力是能够使物体改变它的静止状态或匀速直线运动状态的一种作用。这几乎就是力的现代定义。事实上,力代表物体间的一种相互作用,由于这种作用,物体会改变速度,即获得加速度。力有很多种,这由物体间的相互作用的不同方式而决定,如重力、摩擦力、弹性力等等。

在定义了力的概念以后,牛顿在伽利略关于物体运动研究的基础上,总结出地面物体运动的三大定律。

第一定律:任何物体都保持静止或匀速直线运动状态,直到其他任何物体所作用的力迫使它改变这种状态为止。

这一定律说明,任何物体都具有一种保持原来运动状态的特性。这种特性被称为物体的惯性。因此,第一定律也被称为惯性定律。这个定律也可以这样表述:当且仅当没有一个净外力(未平衡外力)作用在物体上时,每一物体才将保持静止或匀速直线运动不变。这种说法意味着,该定律指出了判定是否存在一个未平衡外力的依据,这就是说,只要存在着偏离直线或沿任一方向做加速运动的物体,就必定存在一个净力,因此力不是匀速运动的原因,而是改变速度的原因。

第二定律:物体受到外力时,物体所获得的加速度的大小与合外力的大小成正比,而与物体的质量成反比,加速度的方向与合外力的方向相同,写成等式为

$$F=ma$$

式中,F 为合外力,a 为获得的加速度,m 为物体的质量。

以微积分形式表达为

$$F=m\mathrm{d}^2r/\mathrm{d}t^2$$

第三定律:当物体 A 以力 F 作用于物体 B 上,物体 B 也必定同时以 F'反作用在物体 A 上,F 和 F'在一条直线上,大小相等而方向相反,即

$$F=-F'$$

人们常常将 F 称为作用力，将 F' 称为反作用力。因此，第三定律也可以表述为：作用力和反作用力大小相等、方向相反，分别作用于不同的物体上。这就是说，每一作用力总有一个与之对立的、相等的反作用力，或者说两物体彼此之间的相互作用总是相等的，并且指向对方。

第三节　现代数学在物理学中的应用

“我们能直觉地感觉到几何概念或许让几何成为宇宙构成的最好语言。

在 21 世纪，我们将无法区别下面的学科：

物理学：量子力学，广义相对论，弦理论。

几何学：示性类，指标公式。

非线性椭圆、抛物方程、双曲系统、混合型方程。

拓扑、代数几何、数论。”

——丘成桐

一、现代数学在相对论中的应用

相对论的基本假设是相对性原理，即物理定律与参照系的选择无关。狭义相对论和广义相对论的区别是，前者讨论的是匀速直线运动的参照系（惯性参照系）之间的物理定律，后者则推广到具有加速度的参照系中（非惯性系），并在等效原理的假设下，广泛应用于引力场中。

1905 年，爱因斯坦创立了狭义相对论，正是德国数学家闵可夫斯基（H. Minkowski，1864—1909）的“闵可夫斯基空间”为爱因斯坦的狭义相对论提供了合适的数学模型。1907 年，他发现狭义相对论应用于物理学的其他领域都很成功，唯独不能应用于万有引力问题。为了解决这个矛盾，爱因斯坦转入了广义相对论的研究，并很快确立了“广义相对论”和“等效理论”。大约在 1911 年，爱因斯坦终于发现了引力场和空间的几何性质有关，是时空弯曲的结果，但数学上碰到的困难使他多年进展不大。最后在数学家格罗斯曼（M. Grossmann）的介绍下掌握了发展相对论引

力学说所必需的数学工具——以黎曼几何为基础的绝对微分学，即爱因斯坦后来所称的张量分析。因此爱因斯坦应用的数学工具是非欧几何。1915 年，爱因斯坦终于用黎曼几何的框架，以及张量分析的语言完成了广义相对论。

相对论和量子力学是现代物理学的两大基本支柱。奠定了经典物理学基础的经典力学，不适用于高速运动的物体和微观领域。相对论解决了高速运动问题；量子力学解决了微观亚原子条件下的问题。相对论颠覆了人类对宇宙和自然的"常识性"观念，提出了"时间和空间的相对性"、"四维时空"、"弯曲空间"等全新的概念。广义相对论的表述第一次解释了非欧几何的现实意义，成为历史上数学应用最伟大的例子之一。



闵可夫斯基(1864—1909)



爱因斯坦(1879—1955)



希尔伯特(1862—1943)

在爱因斯坦建立引力场方程的同时，数学家希尔伯特也沿着另一条路得到了引力场方程，希尔伯特采用的是公理化的方法，从两条基本公理——世界函数公理和广义协变公理出发，运用了当时的一项纯数学成果——E. 诺特关于连续群的不变式理论，得出了他的全部理论。希尔伯特于 1915 年向哥廷根科学会提交了关于物理学的第一份报告，其中得到了一组和爱因斯坦 5 天后发表的引力场方程等价的方程，因而也成为现代引力理论的奠基人。

希尔伯特将建立广义相对论的荣誉归于爱因斯坦，并在1915年颁发的第三届波约数学奖时主动推荐爱因斯坦。

二、现代数学在量子力学中的应用

19世纪末正当人们为经典物理学取得重大成就而庆贺的时候，一系列经典理论无法解释的现象一个接一个地发现了。德国物理学家维恩通过热辐射能谱的测量发现了热辐射定理。德国物理学家普朗克为了解释热辐射能谱提出了一个大胆的假设：在热辐射的产生与吸收过程中能量是以 $h\upsilon$ 为最小单位，一份一份交换的。这个能量量子化的假设不仅强调了热辐射能量的不连续性，而且与辐射能量和频率无关，与由振幅确定的基本概念直接相矛盾，无法纳入任何一个经典范畴。当时只有少数科学家认真研究这个问题。著名科学家爱因斯坦经过认真思考，于1905年提出了光量子说。直到1925年还没有一种量子理论能以统一的结构来概括这一领域已经积累的知识。1925年，德国物理学家海森堡和玻尔，建立了量子理论第一个数学描述——矩阵力学。1926年，奥地利科学家提出了描述物质波连续时空演化的偏微分方程——薛定谔方程，给出了量子论的另一个数学描述——波动力学。而进一步将这两大理论融合为统一的体系便成了当时科学界的当务之急，在这时数学又起到了关键性的作用。1927年，希尔伯特和冯·诺依曼等合作发表了论文《论量子力学的基础》，开始了用积分方程等分析工具使量子力学统一化。随后，冯·诺依曼又进一步利用抽象希尔伯特空间理论，去解决量子力学中经常出现的无界算子情形，从而奠定了量子力学的严格的数学基础。

20世纪初希尔伯特关于积分方程的工作以及由此发展起来的无穷多个变量的理论，确实是量子力学非常合适的数学工具，量子力学的奠基人之一海森堡说：量子力学的数学方法原来是希尔伯特积分方程的理论的直接应用，这真是件幸运的事情！

三、现代数学在场论中的应用

广义相对论的发展，逐渐促使科学家去寻求电磁场与引力场的统一表述，第一个作出大胆尝试的是数学家外尔（H. Weyl，1915—1933），他研

究与物理有关的数学问题，企图解决引力场与电磁场的统一理论问题，他的工作对以后发展起来的各种场论和广义微分几何学有深远影响。外尔在 1918 年提出规范场理论，他自己称之为“规范不变几何”。统一场论的探索后又扩展到基本粒子间的强相互作用和弱相互作用。1954 年，物理学家杨振宁和米尔斯提出了“杨-米尔斯理论”，又称规范场理论，是研究自然界四种相互作用（电磁、弱、强、引力）的基本理论，它起源于对电磁相互作用的分析，利用它所建立的弱相互作用和电磁相互作用的统一理论，已经为实验所证实，特别是这理论所预言的传播弱相互作用的中间玻色子，已经在实验中发现。杨-米尔斯理论又为研究强子（参与强相互作用的基本粒子）的结构提供了有力的工具。在某种意义上说，引力场也是一种规范场，所以这一理论在物理学中的作用非常重要。数学家注意到杨-米尔斯场中的规范势恰是数学家在 20 世纪三四十年代以来深入研究过的纤维丛上的联络。不仅如此，他们还发现，这一理论中出现的杨-米尔斯方程是一组数学上未曾考虑到的极有意义的非线性偏微分方程。1975 年以来数学家对杨-米尔斯方程进行了许多深入的研究，这些研究对于纯粹数学的发展，也起了推动作用。



杨振宁（1922—　）

四、现代数学与超弦理论

20 世纪的物理学有两次大的革命：一次是狭义相对论和广义相对论，它几乎是爱因斯坦一人完成的；另一次是量子理论的建立。经过人们的努力，量子理论与狭义相对论成功地结合成量子场论，这是迄今为止最为成功的理论。粒子物理的标准模型理论预言电子的磁矩是 1.001159652193 个玻尔磁子，实验给出的数值是 1.001159652188，两者的误差是完全一致的，精确度达 13 位有效数值。广义相对论也有长足的发展，在小至太阳系，大至整个宇宙范围里，实验观测与理论很好地符合。

但在极端条件下，引出了时空奇异，显示了理论自身的不完善。就我们现在的认识水平，量子场论和广义相对论是相互不自洽的，因此量子场论和广义相对论应该在一个更大的理论框架内统一起来。现在这一更大的理论框架已初显端倪，它就是超弦理论。

超弦理论，即弦理论，认为不存在粒子，只有弦在空间运动，各种不同的粒子只不过是弦的不同振动模式而已。自然界中所发生的一切相互作用，所有的物质和能量，都可以用弦的分裂和结合来解释。在每一个基本粒子内部，都有一根细细的线在振动，就像小提琴琴弦的振动一样，因此这根细细的线就被科学家形象地称为“弦”。拨动吉他一根弦，你会听到一个音。拨动另一根弦，你会听到另一个不同的音调，因为不同的弦振动的模式不同。一个音乐家通过一个吉他的六弦合奏，使这些弦在不同频率振动，便可创造出无数美妙的音乐。像琴弦的不同振动模式弹出不同的乐音那样，粒子内部的弦也有不同的振动模式，只不过这种弦的振动不是产生什么音乐，而是产生一个个粒子。不同粒子的性质由弦的不同振动行为来决定，电子是以某种方式振动的弦，夸克又是以另一种方式振动的弦，如此等等。

这个 20 世纪 70 年代才兴起的超弦理论，正成为数学家与物理学家携手合作的又一个活跃领域。超弦理论也是以引力理论、量子力学和粒子相互作用的统一数学描述为目标，其中用到的数学涉及微分拓扑、代数几何、微分几何、群论与无穷维代数、复分析与黎曼曲面等。

Hawking(霍金)在杭州的演讲题目 *Brane New World* 中的“brane”就是从超弦理论中发展出来的。

五、数学物理

数学和物理学的发展历史上一直密不可分。许多数学理论是在物理问题的基础上发展起来的；很多数学方法和工具通常也只在物理学中找到实际应用。20 世纪以来，由于物理学内容的更新，数学物理也有了新的面貌。伴随着对电磁理论和引力场的深入研究，人们对时空观念发生了根本的变化。这使得闵科夫斯基空间和黎曼空间的几何学成为爱因斯坦狭义相对论和广义相对论所必需的数学理论。在探讨大范围时空结构

时，还需要整体微分几何。量子力学和量子场论的产生，使数学物理添加了非常丰富的内容。物理对象中揭示出的多种多样的对称性使得群论显得非常有用。晶体的结构就是由欧几里得空间运动群的若干子群给出的。正交群和洛伦兹群的各种表示对讨论具有时空对称性的许多物理问题有很重要的作用。对基本粒子相互作用的内在对称性的研究更导致了杨-米尔斯理论的产生。这个理论以规范势为出发点，而它就是数学家所研究的纤维丛上的联络。有关纤维丛的拓扑不变量也开始对物理学发挥作用。微观的物理对象往往有随机性。在经典的统计物理学中需要对各种随机过程的统计规律有深入的研究。随着电子计算机的发展，数学物理中的许多问题可以通过数值计算来解决。由此发展起来的计算力学、计算物理都发挥着越来越大的作用。科学的发展表明，数学物理的内容越来越丰富，解决物理问题的能力也越来越强。数学物理的研究对数学也有很大的促进作用，它是产生数学的新思想、新对象、新问题以及新方法的一个源泉。

在现代物理学中，数学已经成为展现物理学理论的最重要语言，在理论中有着至关重要的位置。而数学的发展也受到了物理学的很大影响，这在许多著述中已经得到了讨论。比如杨振宁先生就曾经用一个“二叶理论”来形象地表示物理学和数学的关系，他认为数学和物理学就像两片对生的树叶，只在基部有少许公共部分，而它们各自有不同的价值观念和学术传统，互相独立地生长。而从整个物理学的角度来看，物理学和数学关系是一个相互作用的复杂过程。事实上，这种相互作用贯穿于整个物理学的发展过程中。

思考题：

1. 数学在其发展的过程中，对物理学的哪些领域产生过重大影响？
2. 牛顿是怎样把数学和物理学完美地结合在一起的？
3. 现代数学主要应用于物理学的哪些领域？
4. 如何看待数学与物理学之间的关系？

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

第五章

数学与生物学、化学的发展

数学是上帝描述自然的符号。

——黑格尔

宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，无处不用数学。

——华罗庚

生态学本质上是一门数学。

——皮娄（加拿大生物学家）

数学，具有高度的抽象性、逻辑的严格性和广泛的应用性。她是一切自然科学的基础，没有数学的发展，就没有物理学、天文学、生物学、化学等自然科学的长足进步。长久以来，数学一直以近乎苛刻的方式探寻着自然界的奥秘，她不仅仅是数字的游戏，她的思想和方法是解决自然科学问题的重要工具。

17 世纪，数学首先找到了她第一个“知己”——物理学，数学与物理学的结合，使物理学成为上两个世纪的带头学科；18 世纪以后，数学又成了化学的“帮手”，数学方法在化学中的应用，极大地促进了化学的发展，从定量分析到量子化学，从数量分析到计量化学，数学到处显示着她独特的魅力；19 世纪后，数学与生物学的关系也越来越密切，现今生物数学的华丽登场，预示着生物学必将会成为 21 世纪的领军学科。

数学对自然科学发展的贡献毋庸置疑，正如康德所说：“每门具体的自然科学中，有多少数学存在，就有多少严格的科学。”




第一节　数学与生物学

一、数学与动植物形态最优化

有人曾认为，数学在生物学上的应用等于零。确实，19 世纪以前，数学与生物学确实看似没有任何联系、毫不相干，其实则不然！现今，如果我们运用数学的知识探讨生物界中的种种现状，就会发现，生物界中的自然现象与数学有着十分密切的关系，其间充满了数学。

1. 植物中的数学

案例 1　植物在茎上的排布顺序与黄金数 0.618…（它在最优化方法中是一个重要数据）有关，这对植物通风、采光和生长来讲都是最佳的（图 5-1）。

案例 2　牵牛花在沿攀援物向上爬时，它选择了最短的路径——螺线。蓟花、向日葵果盘中也可找到螺线（图 5-2）。

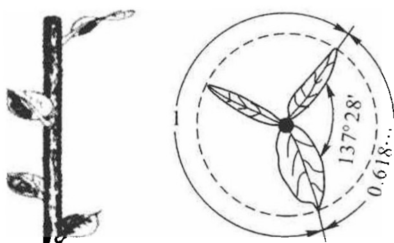


图 5-1

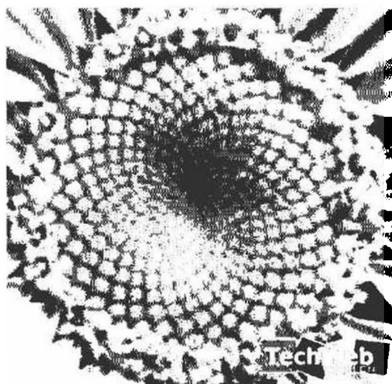


图 5-2

诸如以上的例子，多得数不胜数，这里就不一一列举了。

亿万年来，植物向来是默默无闻的，然而在其默默无闻的背后又是什么呢？它们一直在偷偷地运用着数学，优化着自己的生存环境。它们从

体液到叶序、从果盘到花瓣，处处有数学，到处是数学。大自然果真是一位杰出的数学家，她按照最优的数学结构规划着这个世界，致使这个世界如此完美，令人惊叹！惊叹之余，我们不禁开始反思，物理中有数学，天文中有数学，音乐中有数学，植物都在沿袭着数学规律，也许真的像毕达哥拉斯所说的，“万物皆数”。

2. 动物中的数学

案例 1 大雁迁徙时排成的“人”字形，其一边与飞行方向成 54°44′8″，经计算发现，这是大雁飞行时阻力最小的队形。

案例 2 人和动物的血液循环系统中，血管不断地分岔成两个同样粗细的支管，生物学家发现，它们的直径(半径)之比为 32∶1。依据流体力学理论计算可知，这种比在分支导管系统中，液流(液体的流动)的能量消耗最少。

案例 3 “蜂房结构”问题。人们很久以前就注意到了蜂房的构造：乍看上去是一些正六边形的筒，然而，每个筒底是由三块同样大小的菱形所拼成(图 5-3)。经数学家证明，蜂房的如此结构是建造同样大的容积所用材料最省的形状。

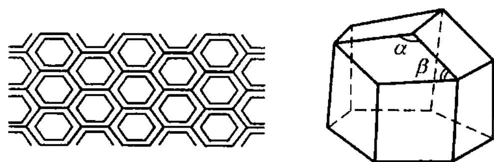


图 5-3

奇妙吧！自然界中各种生物的进化，真是一件非常奇妙的事情。大自然为什么要向着这样的一个方向进化？进化的标准又是什么？诸如此类问题困惑了人们很长时间。数学的出现，为其找到了依据、提供了证明。只有向着这样的方向，才最有利于动植物的生存。

数学论证了自然界的和谐，自然界本身的和谐也为验证数学的严谨与和谐提供了最有力的范例。自然界中充满数学的同时，数学也在其中得到了生命。所以，数学确是经自然之手创造的、最美的、最严谨的科学。

二、数学与遗传

1. 孟德尔与数学

孟德尔(Gregor Johann Mendel) 1822 年 7 月 20 日出生于奥地利西里西亚，是遗传学的奠基人，被誉为现代遗传学之父。在孟德尔从事的大量植物杂交实验中，以豌豆杂交实验的成绩最为出色。经过整整 8 年(1856—1864)的不懈努力，终于在 1865 年发表了《植物杂交实验》的论文，提出了遗传单位是遗传因子(现代遗传学称为基因)的论点，并揭示出遗传学的两个基本规律——分离规律和自由组合规律。这两个重要规律的发现和提出，为遗传学的诞生和发展奠定了坚实的基础，这也正是孟德尔名垂后世的重大科研成果。



孟德尔(1822—1884)

假如孟德尔没有良好的数学基础的话，他能不能发现遗传定律呢？答案很可能是否定的。尽管遗传学是生命科学的主流，但它却是一种混合的学问，它更需要假助于数学的定律来分析种种遗传问题。

让我们来谈谈孟德尔的典型实验吧。他首先注意到花园里的豌豆有高矮两种，因此选用这对简单的形态特性作为实验的对象。普通豌豆是自行受精的植物，也就是由自己雄蕊之花粉受精自己的卵细胞。研究者可把它的雄蕊花粉囊去除，再移入其他植物的花粉进行人工授精。孟德尔先让高矮两种豌豆自行受精几代，得到纯种。至此，高豌豆(1.8～2.1 米)的种子一定长出高豌豆，矮豌豆(0.3～0.6 米)的种子一定长出豌豆。

然后再以人工授精的方法进行交配。

孟德尔是在 1865 年做这个世界著名的实验的。当时生物界能提供他的遗传知识是花粉可使卵细胞受精，如此而已。至于对细胞的染色体、减数分裂、双倍体及单倍体等等一无所知。在这种状况下，他要分析他的实验数值实在不是一件很容易的事情。幸好他有良好的数学训练，于是他利用了数学上演绎推理的方法分析了遗传定律。

由他的实验指出下面的事实：

(1)高(1.8～2.1米)与矮(0.3～0.6米)的遗传特性是一成不变的，没有中间的高度(如1～1.4米)出现。

(2)F_1 植物没有矮的特性表现出来；但是在 F_2 后代的植物就表现出来，而且按照固定的高矮比例(3∶1)出现。

(3)一部分$\left(\frac{1}{3}\right)$的 F_2 代植物变为纯种；另$\frac{2}{3}$的 F_2 代产生 F_3 代时继续离析。

(4)F_2 代的矮植物只能产生矮的后代(F_3)。

孟德尔依照这些事实提出下列三点假设：

(1)高的基因为T，矮的基因为t。

(2)若由卵细胞提供高的基因(T)，精子提供矮的基因(t)，所形成的受精卵及其所产生的植物就同时带了这两种基因，这两个基因在植物产生卵细胞与精子的时候又被离析(细胞减数分裂直到1880年才被阐明；在1865年孟德尔就有此先见，令人折服)。

(3)当T基因与t基因同时存在时，只表现T基因，那就是说T基因是显性，而t基因为隐性。

这些假设可以圆满地解释孟德尔的实验结果。基因是以完整的个体一代一代地传递下去的。纯合子时，其基因型已定型，所产生的生物个体都是纯种；至于杂合子，在产生下一代的生物个体时，依3∶1的比例离析。

上面介绍的是有关一对基因交配的情况，假如有两对基因，交配时则可能出现以下两种情形：①两对基因在离析时会互相影响；②两对基因在离析时是互不相干的。

孟德尔的实验结果证明第二种情形是正确的。因为在双倍体生物中两对基因Aa×Bb交配时所得之下一代的表现型为9AB∶3Ab∶3aB∶1ab，依孟德尔的实验结果，各种表现型的植物为315∶108∶101∶32＝9∶3∶3∶1。由此，依数学原理来看，上述Aa与Bb两个基因组的离析是独立进行、互不干涉的，这种遗传现象后来被称为孟德尔第二定律或独立分配定律。

孟德尔种豌豆的故事值得我们思索：在孟德尔之前已有成千上万的

人种过豌豆，却没有人去深究它的遗传特性，正如在牛顿之前有很多人在苹果树下坐过，冥想过，也被落下的苹果打过头，却没有人能悟出万有引力的道理一样。科学真理的发现必然要靠灵感和机运，但是与从事科学研究者的背景和潜力也同样重要。孟德尔的数学基础，无疑帮助他度过了思维的难关。

2. 生男育女与数学

1676 年牛顿发现了二项式的展开式，到 17 世纪时，数学家伯努利把二项式的展开式应用到了遗传学上。

生男育女本是极平常的事，其或然率却可用二项式的展开式来预测。

设生男的机会为 p，则育女的机会自然为 $1-p$ 或 q。在理论上 $p=q=\frac{1}{2}$，若一对夫妇一连生下两个小孩，其生男育女的或然率为：

$$(p+q)^2=p^2+2pq+q^2$$

两个都是男孩的机会为 $p^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$；一男一女的机会为 $2pq=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$；两个都是女孩的机会为 $q^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$；假如一连生下三个小孩，其生男育女之或然率为：

$$(p+q)^3=p^3+3p^2q+3pq^2+q^3$$

连生三个都是男孩的机会为 $p^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$；两男一女的机会为 $3p^2q=3\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$；一男两女的机会为 $3p^2q=3\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$；一连生三个千金的机会为 $q^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$。

数学家喜欢用一般式来表示二项式展开式：

$$\frac{n!}{m!\ (n-m)!}p^m q^{n-m}$$

式中：n 为小孩子的数目；m 为生男孩的次数；p 为生男的机会，q 为育女的机会。

例如：在 10 个小孩的家庭里，6 男 4 女发生的机会为多少？

答：

$$\frac{10!}{6!\,(10-6)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{10-6}=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}\left(\frac{1}{2}\right)^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}=\frac{105}{512}$$

此方法不仅可以计算生男生女的概率，其他遗传疾病的发生率也可以按此法来计算，由于计算方法类似，这里就不再赘述了。但必须明确的是：数学对遗传学的研究贡献之大，是无法仅用几段短短的文字和几个小小的事例来表述的。除了前面所介绍的遗传学定律与或然率的计算以外，还有很多遗传问题需要用到数学。一般来说分子遗传学所用的数学较少，而在对族群遗传学、免疫遗传学、医学遗传学及人类遗传学进行的研究中，数学与统计就是主要的方法了。

3. 哈定-温伯(Hardy-Weinberg)定律与数学

哈定-温伯定律是族群遗传学的基本定律。它是一门连接孟德尔定律及达尔文演化论的学科，它的特色就是利用数学的方法来研究受到选择、突变、迁移、近亲交配及其他因素影响下的族群基因结构。它肯定了数学在生物学上的角色，而且是被公认为数学应用在生物学上最成功的例子。

哈定-温伯定律是由英国数学家哈定及德国医生温伯分别推论出来的。在一族群中有很多基因型出现，通常这些基因型在族群中出现的机会已达到平衡，此时任何一个基因的频率都符合二项式$(p+q)^2$的展开式$p^2+2pq+q^2=1$。

此定律有三个基本假设：

①我们考虑的族群必须是一个随机交配的族群，而且族群必须大到可以忽略突变等随机因素。

②族群里的生物均为二元体，而且无性别之分。我们假设在基因座上有两个对位基因 A 及 a，因此族群里有三种可能的基因型 AA、Aa、aa，而其频率分别为P、$2Q$、R，$P+2Q+R=1$。

③假设代代不重合。换句话说，我们假设第一代在第二代到达生育年龄之前死亡，或者考虑问题时不把第一代算在内。

在假设①、②、③之下，由简单的孟德尔定律，我们得到下列结果：

交配方式	交配频率	交配结果(比例) AA	Aa	aa
AA×AA	P^2	1	0	0
AA×Aa	$4PQ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
AA×aa	$2PR$	0	1	0
Aa×Aa	$4Q^2$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Aa×aa	$4RQ$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
aa×aa	R^2	0	0	1

现令 P'、$2Q'$、R'分别为 AA、Aa、aa 的第二代频率，由上述表格，我们得知

$$P' = P^2 \cdot 1 + 4PQ \cdot \frac{1}{2} + 4Q^2 \cdot \frac{1}{4} = (P+Q)^2 \tag{1}$$

$$2Q' = 4PQ \cdot \frac{1}{2} + 2PR \cdot 1 + 4Q^2 \cdot \frac{1}{2} + 4RQ \cdot \frac{1}{2} = 2(P+Q)(Q+R) \tag{2}$$

$$R' = 4Q^2 \cdot \frac{1}{4} + 4RQ \cdot \frac{1}{2} + R^2 = (Q+R)^2 \tag{3}$$

同理，如果我们令 P''、$2Q''$、R''分别为 AA、Aa、aa 第三代的频率，则

$$P'' = (P'+Q')^2 = (P+Q)^2 = P'$$

$$R'' = (Q'+R')^2 = (Q+R)^2 = R'$$

$$Q'' = (P'+Q')(Q'+R') = Q'$$

因此，AA、Aa、aa 等基因型的频率在第二代以后就保持不变，而且在第二代时，我们就有下列关系式

$$(Q')^2 = P'R' \tag{4}$$

如果一个族群在第一代就满足

$$Q^2 = PR \tag{5}$$

则不仅在第二代之后基因型之频率不变，而且可得知

$$\begin{aligned} Q' &= (P+Q)(R+Q) = PR + RQ + PQ + Q^2 \\ &= Q(P+2Q+R) \end{aligned}$$

$$= Q$$

$$P' = (P + Q)^2 = P^2 + 2PQ + Q^2 = P(P + 2Q + R)$$

$$= P$$

$$R' = (R + Q)^2 = R^2 + 2RQ + Q^2 = R(R + 2Q + P)$$

$$= R$$

如果一个族群满足(5)式，则我们称其基因型到达哈定-温伯平衡。

综合以上的讨论，由哈定及温伯在1908年分别发现的定理就是：

在①、②、③的假设下，令一个族群基因型AA、Aa、aa的频率分别为P、$2Q$、R，$P+2Q+R=1$。经过一代的随机交配后，我们得到一个稳定的基因型频率p^2、$2pq$、q^2，$p=P+Q$，$q=Q+R$。如果$P=p^2$、$2Q=2pq$、$R=q^2$，则其基因型频率永远保持不变。

哈定-温伯定律说明了如果(5)式成立，则我们只需考虑一个变数p，而不必考虑(P,Q)。但是最重要的是在说明如果没有外力，则其基因型的频率会一直很稳定。

以上，我们大致介绍了哈定-温伯定律及其假设。以上的结果是我们假设三种基因型AA、Aa、aa并无选择的差别，换句话说，我们假设生殖率、死亡率均相等。但如果我们考虑这些差别，则哈定-温伯定律就不成立。所以，整个族群遗传学就是在讨论什么情形下哈定-温伯定律不成立，以及如何利用适当的数学模型来解释进化论。对于喜爱数学的人，族群遗传学确是一门具有挑战性的学科，它所提出的问题均是非线性差分方程及随机过程，很值得研究。

4. DNA结构与数学

一个生物的全基因组序列蕴藏着与这一生物的起源、进化、发育等所有遗传性状有关的信息。所有这些重要信息都写在由4种碱基(A、T、G、C)组成的基因组DNA那条长长的双链上，大自然各种生灵的千变万化仅仅是由ATGC四个字母排列的变化而致。那么，四个字母何以能构造出如此无穷多的变化呢？生物学家告诉我们，四种碱基的基因排列决定20种氨基酸的蛋白质序列，排列不同则所生成的蛋白质也不同。再进一步，不同的蛋白质序列导致了构象的不同，构象的不同又决定了功能的不同。由此可知：排列是最基本的，排列中包含着极为丰富的信息。

那么，数学在此起到了怎样的作用呢？

首先，在排列决定构象、构象决定功能的过程中存在不少数学问题，如：排列如何决定构象？排列与构象间是什么关系？构象又是如何形成的？因为有些构象是缠绕的，有些是打结的，那么到底有多少构象？如果要研究以上这些问题就必须涉及各种数学分支，如拓扑学、几何学，另外几何中的弯曲、扭结、缠绕等数学理论也是必不可少的。

其次，由于构成基因的 DNA 序列中很大部分是非编码序列，即所谓的"垃圾 DNA"，怎么区分编码和非编码序列？这就需要用到数学中的如数理语言、数理逻辑、密码学等知识，通过比较，用已经认识的东西来比较还不认识的东西。

最后，人类对于 DNA 的研究目前还在不断的进行当中，很多问题尚不明确，所以需要用到何种数学知识还有待考证，很有可能需要创造新的数学领域才能解决未来所要面临的问题，但数学在此过程中所起的作用是不容忽视、无可替代的。

三、生物数学

1. 生物数学简介

生物数学是生物学与数学之间的边缘学科。它是用数学方法研究和解决生物学问题，并对与生物学有关的数学方法进行理论研究的学科。

如果把生物学的分支领域看作一个集合，数学的分支领域看作另一个集合，生物数学就是这两个集合导出的乘积空间。因而生物数学的分支内容非常丰富，从研究使用的数学方法划分，生物数学可分为生物统计学、生物信息论、生物系统论、生物控制论和生物方程等等分支。

生物数学是在生物学的不同领域中应用数学工具对生命现象进行研究的学科。其一般方法是建立被研究对象的数学模型并对其进行定性和定量研究，主要应用的数学方法有微分方程、概率论和数理统计、抽象代数、拓扑学、突变理论等。电子计算机的发展使生物数学的研究又有了新的突破。生物数学的内容是多方面的：生物统计、数量遗传、数学生态和数学生物分类学可作为四大分支。生物统计学用统计方法研究生物界的客观现象；数量遗传学用数学方法研究在各种不同情况下全体基因型的

变化，研究数量型遗传规律；数学生态学用数学理论和方法描述生态系统的行为动态定量关系，建立各种生态模型，模拟动物行为；数学生物分类学使用现代数学方法和工具（特别是电子计算机）对古老的生物分类学进行研究。目前，数学方法几乎渗透到生物学的每个角落，有人预言：生物学将会取代物理学成为使用数学工具最多的学科，21 世纪可能是生物数学的黄金时代。

生物数学的分支学科较多，从生物学的应用去划分，有数量分类学、数量遗传学、数量生态学、数量生理学和生物力学等；从研究使用的数学方法划分，又可分为生物统计学、生物信息论、生物系统论、生物控制论和生物方程等分支。这些分支与前者不同，它们没有明确的生物学研究对象，只研究那些涉及生物学应用有关的数学方法和理论。

生物数学具有丰富的数学理论基础，包括集合论、概率论、统计数学、对策论、微积分、微分方程、线性代数、矩阵论和拓扑学，还包括一些近代数学分支，如信息论、图论、控制论、系统论和模糊数学等。

由于生命现象复杂，从生物学中提出的数学问题往往也十分复杂，需要进行大量的计算工作。因此，计算机是研究和解决生物学问题的重要工具。然而就整个学科的内容而论，生物数学需要解决和研究的本质方面是生物学问题，数学和电脑仅仅是解决问题的工具和手段。因此，生物数学与其他生物边缘学科一样通常被归属于生物学而不属于数学。

2. 生物数学的研究内容

依据生命科学的需要，生物数学的内容分为以下几个主要方面：

（1）生命现象数量化的方法

所谓生命现象数量化，就是以数量关系描述生命现象。数量化是利用数学工具去研究生物学的前提。生物表现性状的数值表示是数量化的一个方面。生物内在的或外表的、个体的或群体的、器官的或细胞的，直到分子水平的种种表现性状，依据性状本身的生物学意义，都可用适当的数值予以描述。数量化还表现在引进各种定量的生物学概念，并进行定量分析。如体现生物亲缘关系的数值是相似性系数。各种相似性系数的计算方法及在此基础上的分类运算构成数量分类学表征分类的主要内容。各种相似性系数的计算方法及在此基础上的分类运算构成数量分类

学表征的主要内容。遗传力表示生物性状遗传后代的能力，对它的计算及围绕这个概念的定量分析是研究遗传规律的一个重要部分。多样性在生物地理学和生态学中是研究生物群落结构的一个抽象概念，它从种群组成的复杂和紊乱程度体现群落结构的特点。数量化的实质就是要建立一个集合函数，以函数值来描述有关集合。传统的集合概念认为一个元素属于某集合，非此即彼界限分明。可是生物界存在着大量界限不明确的、"软"的模糊现象，给生命现象的数量化带来困难。1965 年扎德(L. A. Zadeh)提出的模糊集合适合于描述生物学中许多"软"的模糊现象，为生命现象的数量化提供了新的数学工具，以模糊集合为基础的模糊数学已广泛应用于生物数学。

(2)概率与统计方法

生命现象常常以大量、重复的形式出现，又受到多种外界环境和内在因素的随机干扰，因而概率论和统计数学是研究生物学经常使用的方法。生物统计学是生物数学发展最早的一个分支，各种统计分析已经成为生物学研究工作和生产实践的常规手段。概率与统计方法表现在随机数学模型的研究。以随时间而变化的随机变量来描述生命现象是研究随机现象的重要概念，以这种观点研究生命现象必须先建立数学模型，然后利用随机数学理论去分析研究随机现象的规律性。随机数学模型分为连续和离散两大类。马尔科夫链作为离散的数学模型成为研究生物学的重要工具，已广泛应用于群体遗传学、生态学、环境科学和医学的研究。

(3)数学模型方法

能够表现和描述真实世界某些现象、特征和规律的数学系统，人们称之为数学模型。数学模型能定量地描述生命物质运动的过程。一个复杂的生物学问题借助数学模型能转变成一个数学问题，通过对数学模型的逻辑推理、求解和运算，就能够获得客观事物的有关结论，达到对生命现象进行研究的目的。从是否考虑随机因素，可将数学模型分为确定模型和随机模型两大类。从数学物理方程中引出的许多微分方程数学模型都属于确定模型。从考虑生命现象繁殖增长特点，又可分为离散模型和连续模型。离散模型用来描述世代不重叠繁殖增长的生命现象，而连续模型则用来描述个体数量很大、世代重叠繁殖增长的生命现象。

(4)综合分析方法

世界上一切物质的运动都是相互联系、相互制约的，生命现象表现尤为突出。非生命科学发展起来的数学，在被利用到生物学领域时就须从事物的多方面，在相互联系的水平上进行全面的研究，须用综合分析的数学方法。目前主要的综合方法有：多元统计分析、分类分析、系统论和控制论等。多元统计分析是应综合分析的需要，从经典统计学中分化出来的一个分支领域。它是从统计学的角度进行综合分析的数学方法。多元统计的各种矩阵运算体现多种生物实体与多个性状指标的结合，在相互联系的水平上，综合统计出生命活动的特点和规律性。在生物数学中常用的多元统计分析有回归分析、判别分析、主成分分析和典范分析等。分类分析是一种专门解决分类问题的综合分析方法，起源于多元统计中的聚类分析，多种数学工具的介入早已超出统计学的范畴而发展成新的生物数学方法。系统论和控制论是最得力的综合分析数学方法，它以动态的观点进行综合分析，应用于庞大的生态系统和复杂的生理学研究。

(5)不连续的数学方法

不连续性是一切物质存在的基本属性。首先，物质和能量这两个最基本的概念是不连续的；再看生命现象、物种、个体、细胞、基因等都是生命活动不连续的最小单位，有性繁殖的世代交替和循环重复的许多生理现象都是不连续的，生命活动的不连续表现尤其突出。因此，不连续的数学方法在生物数学中占有重要地位。描述不连续生命现象的离散模型有两态和多态之分。马尔科夫链和分类分析属于多态的离散模型；两态的模型应生物学中二元表现状态而产生。如神经兴奋的传递、兴奋波的通过与否就是一个二元表现状态。1943 年麦卡洛克和皮茨在布尔代数的基础上，首次给出描述神经传递现象的离散模型。随着模型的不断改进，并借助计算机加以实现，现在已经能够模拟许多较复杂的神经功能，成为探索人类大脑思维奥秘的一个重要手段。不连续数学方法还表现在对连续方法的补充。微积分的基本理论指出，函数的可微性蕴涵着连续性，因此以微分运算为基础的数学模型都是连续的。这些模型只适用于连续变化的范围，对于连续函数出现不连续点或奇点(包括导函数不连续点)情形，模型无效。而恰恰在这些破坏了连续的区域，却常常是生物学需要研

究的课题。

(6)计算机方法

随着计算机的计算速度、计算方法和计算机软件设计的快速发展,对解决生物数学中复杂的模型,大量的运算和数据的收集与分析等问题,计算机方法显得越来越重要。首先,在生物数学中几乎所有的数学模型应用研究都需要计算机才能实现,计算机的软件设计随着模型的复杂和运算量的增加显得日益重要。其次,传统的生物学研究方式把收集整理信息数据与数据的运算分析分割开来,数据的运算分析由计算机完成,数据的收集整理靠生物学家手工操作。计算机处理信息数据的能力产生和提高以后,这两项工作都由计算机自动完成,在计算机内这两项工作不再分割,而是互相密切联系,依据信息的特点和分析工作需要,在计算机软件系统的统一安排下同时完成。再次,数学应生命现象的需要,再加上计算机技术的不断提高,数学的概念正在改变。在新的概念下,计算机运行时传统的数据运算可以看作是某种信息数据的转换处理;反过来信息数据的处理也是一种新的数学运算形式。最后,当计算机能力不断提高后,进行计算机模拟实验成为了可能。目前的模拟有两种方式,一是基于一定的数学模型设计程序,给出不同的参数,在计算机上运行该数据模型,以数据模型的运行模拟生命现象。二是依据对生命现象的观察了解,设计相应的计算机系统来替代某种生命现象,运行该系统在计算机中重演生命物质运动的过程,由此了解生命活动的规律。计算机技术的提高为实现这两种模拟创造了条件。

3. 生物数学现状与发展前景

2004 年英国皇家学会院士、英国沃里克大学教授 Ian Stewart 曾经预测,21 世纪最令人兴奋、最有进展的科学领域之一,必将是生物数学。美国亚利桑那州立大学教授 Jim Austin 在特辑的一篇文章里表达了同样的观点,他写到:“如果说 20 世纪属于物理学,那么 21 世纪将属于生物学。”可见,生物数学大有发展前途。

然而,我们也必须意识到,当今的生物数学仍处于探索和发展阶段,许多方法和理论还很不完善,它的应用虽然取得某些成功,但水平仍然不是很高,解决问题也不是很透彻。许多更复杂的生物学问题至今未能找

到相应的数学方法进行研究。这就需要未来的生物学家具备更多的数学知识，对生物学和数学都有更深的了解，这样才有可能让生物学研究更多地借助数学的威力，进入更高的境界。现在，许多国外大学的院系、国家实验室、政府部门和私人公司都有数学研究的空间。对于想成为数学家的人特别是那些对实际应用甚感兴趣的人来说，现在是千载难逢的大好时机。生物数学这一新兴的边缘学科必将在生物大世纪中大展宏图。

第二节　当今生物学与数学的结合点

当今，生物学与数学结合得更加紧密，涉及生物学及数学的多个领域，这是一个庞大的体系，难以尽数。我只是简单地挑选几个我认为很经典的生命科学问题的定量化描述。挑选它们，并非由于它们的重要性，关键在于，我认为从这些研究中能得到美的享受。

一、通路的网络式研究

功能基因组学广泛使用的一种方法是基因敲除：敲除某一基因（在当今实现这一点比较容易），根据它的表象确定基因的功能；进而使用"拯救（rescue）"的方法，通过注射 mRNA 或蛋白质看是否能恢复该功能，从而确立基因与功能的联系。但基因敲除这一方法有两个巨大问题，都与生命体系的网状结构相关。

第一，生物体内，无论信号传导还是新陈代谢，往往存在不止一条通路，当一条通路出现问题时，另一条通路可以补救，这样的话很可能表现不出什么性状。基因敲除的大部分实验都会发现基因敲除后无影响，原因就在这里。当然，基因敲除后有影响的基因，一定是处于枢纽地位的核心基因。

第二，表现为在某个地方出现的问题，其实起因可能在于网络的另一部分。比如代谢系统中，敲除了一个基因，引起血液中酮体（ketone body）的升高，它固然有可能是抑制血液中酮体含量的基因，然而也有可

能是与血糖含量有关的基因。因为如果血糖含量下降，为补充脑等主要依靠糖为能量来源的器官，只好依靠酮体来补充能量供给。因此，生命系统的网络化导致了问题的复杂性。

比如细胞周期就是一个复杂的过程，它的全过程涉及多个调控细胞周期蛋白的合成、修饰、降解，包括最常见的 Cyclin 系列蛋白和 CDK 等蛋白，同时还有大量的抑制因子、蛋白降解复合体等。而正常情况下细胞也正是如传统生物书上所写的那样一步步地进行分裂的。那么这些蛋白中的某一个如果出现异常，结果会怎样呢？有人对酵母细胞周期从网络上整体地进行研究。首先他们参考了尽可能多的且比较确切的细胞周期蛋白的调控情况，经过化简，得到了图 5-4 中的左图。他们用简化的算法（离散化后未考虑时间差异）进行计算机拟合，得到了如图 5-4 中的右图的细胞周期蛋白相互作用过程图。同时研究人员证明了当这条通路的某一处出现问题，由其他的路径可以进行弥补和校正，认为细胞周期蛋白具有"乳棒性"（robust）。这也与我们对生物现象的想象相一致：生命系统确实具有相当的能力对各种变化进行校正。

这也暗示了我们对生物的研究应该或可以从宏观的角度进行，而网络理论也应成为生物研究的一个工具。

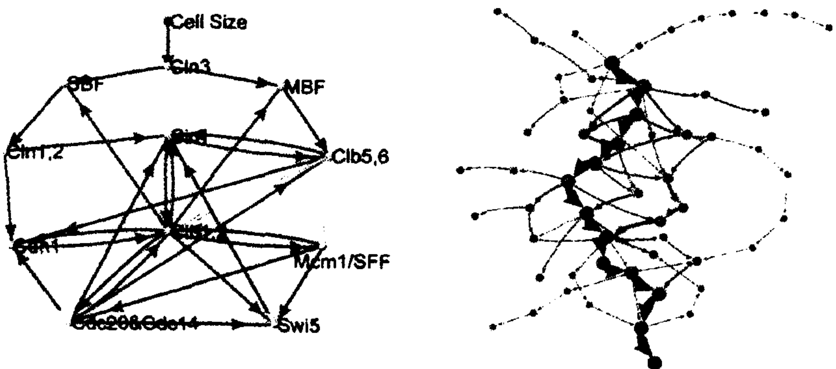


图 5-4　酵母细胞周期的网络研究

人们的疾病是复杂性网络系统的又一个例子。复杂疾病由多种遗传因子（内因）和环境因子（外因）及其之间的相互作用决定，如糖尿病、肥胖症、骨质疏松症、高血压、心血管疾病等。因为交互作用的存在，这些因素

究竟起到多大的作用是一个很复杂的问题。现在也有一些研究者利用定量手段在做这些因素的评估，对预防疾病有相当大的贡献。

更为关键的是，这一规律给生物界带来了统一的光明。一直以来，生物就以其多样性的特征而使研究难以统一。尽管进入了基因研究时代后，在不同动物和不同植物之间找到了相当多的共性（同工或同源性），仍然无法和物理、化学等学科的统一连贯相媲美；但是这一规律给出了在生物个体水平的一个统一规律，应当说还是迈进了一大步。

二、蜜蜂的遗传与社会

在进化中，意识是如何产生一直是一个重要的问题，而与其相关的一些类似本能的反应是如何形成的也受到相当的关注。

社会是如何形成的？马克思对此有重要理论，在此不加过多解释。但是从纯生物的角度，John Whitfield 给出了另一种解释，试图给出心理与物质基础的一种关系。

目前我们观察到的几乎所有个体都有将自己基因往下传的趋势，事实上也只有这样的物种才有机会留到今天。但是有一些物种“似乎”不符合这一特征，如工蜂，自己劳动供应蜂王食物，并保卫她的安全，好像并没有使自身的基因保留下来的愿望。

对此，John Whitfield 分析了蜜蜂与人两种不同社会形态背后的遗传过程中的染色体行为（见图 5-5 左图）。由于蜜蜂具有孤雌生殖，卵不受精发育成雄蜂，受精发育成雌蜂（蜂王或工蜂）。因此对于一只工蜂来说，如果她与雄蜂交配，生得的子女有 50%的可能将基因传递下去；而蜂王，这只工蜂的姐妹，则有 75%的可能性与她具有相同的基因（见图 5-5 右图）。从保存基因的角度，她应该对蜂王更好，因此舍弃了自己生育的机会同样是为了保留自身的基因。而人类的男性女性均为双倍体，不存在这一问题，因此人类与蜜蜂形成了两类截然不同的社会形态。

尽管这一假说仍有说服力不足之处，但是无疑是通过定量地方法给出了一种关乎物质与意识关系的解释，仍然可以给人们带来美感。而此研究的一个关键之处就在于定量地去分析基因的同源率，尽管是再也简单不过的数学。

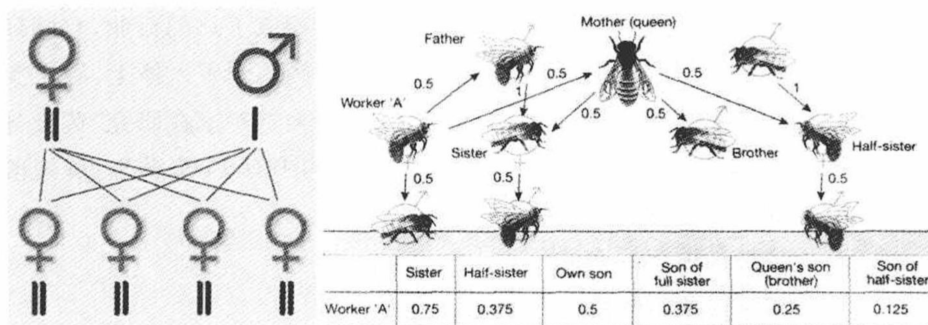


图 5-5 蜜蜂遗传过程中的染色体行为

第三节 数学与医学

数学与医学的关系是很密切的。我们只需看一看医学诊察所用到的仪器，诸如心电图、超声波、CT 及磁共振等就很清楚了。

1895 年，物理学家伦琴在研究阴极射线所引起的荧光现象时偶然发现了 X 射线。从此，人们可以不用开刀就可以看到身体内部，特别是骨骼的情况。X 射线透视应用了 100 多年。但是，X 光片有时清晰度太差，特别是对人体软组织器官几乎无能为力，于是出现了经过数字化处理的 CT 及磁共振等。与它们直接成像不同的是心电图和脑电图，它们是怎么来诊断疾病的呢？

原来，它们都是通过测定人体活动电流来进行工作的。心电图、脑电图诊断都是把人体的电脉冲转化为正弦曲线，通过观察和比较曲线的形状、振幅和相应位移来作出健康与否的判断。

正常的心脏产生的活动电流随时间发生有规律的周期性变化，一个周期的波形由 5 个主要波构成，每部分波可以表明心脏某个部分的运动。当心脏的哪个部分出了问题，相应部分的波形就会改变。

脑电图与心电图的原理是一样的，只不过脑电流比心电流活跃得多，因而脑电波要比心电波复杂，但仍然具有周期性。

脑电和心电的运动都可以用数学函数来表示，这些函数的视觉化就是波。

随着人们对美的不断追求，近些年来医学美容成了热门行业，它同样也离不开数学。不久前，美国人把"黄金分割"比例用到了人体上，寻求美的验证，有的甚至用来指导医学美容。我国医学美学专家在研究"黄金分割"与人体关系时，发现体形健美的人的外观结构中有 14 个黄金点（短段与长段的比值为 0.618），它们是：

（1）肚脐是头顶至足底的分割点；

（2）咽喉是头顶至肚脐的分割点；

（3）、（4）膝关节是肚脐至足底的分割点；

（5）、（6）肘关节是肩关节至中指尖的分割点；

（7）、（8）乳头是躯干纵轴上的分割点；

（9）眉间点是发际至颏底间距上 1/3 与中下 2/3 的分割点；

（10）鼻下点是发际至颏底间距上 1/3 与上中 2/3 的分割点；

（11）唇珠点是鼻底至颏底间距上 1/3 与中下 2/3 的分割点；

（12）颏唇沟正中点是鼻底至颏底间距下 1/3 与上中 2/3 的分割点；

（13）右口角点是口裂水平线左 1/3 与右 2/3 的分割点；

（14）右口角点是口裂水平线右 1/3 与左 2/3 的分割点。

当然，以上仅是研究者个人认识，也仅是一个参考数值。实际上人体美除了恰当的比例外，还与种族、地域以及个体差异有关系。

第四节　数学与化学

化学是一门实验性科学，在可预见的将来，它仍会以实验为中心，那数学又怎么和它拉上关系的呢？这问题要从两方面来讲。

一方面，现代化学渐渐朝微观的方向探讨物质的组成、构造及反应，也就是从原子的观点来研究，所以受近代物理学很大的影响（无论是理论或实验上），其中主要是量子力学与统计力学的应用，它所采取的语言遂也有数学化的倾向。

另一方面，化学在实际上的应用，现在也越来越需要更严格定量的

(quantitative)知识，举凡分析化学乃至化工计算，我们都需要更多更精确的化学计算工作，这就涉及更多的应用数学。

所以数学在化学中的应用大致可分为两个层次，其一是语言上的，其二是技术上的。前者是以数学化的语言来讨论化学上的问题，侧重观念性，后者则是以数学的技术来做更复杂的计算工作。

一、化学家与数学

案例 1 拉瓦锡——法国著名化学家。

人们把拉瓦锡称为“定量化学之父”，其实拉瓦锡对化学的贡献中并没有可以称得上是重大发现的内容，而他之所以著名，就是因为，他以数学和物理为手段，在牢固的基础上去建立崭新的化学，完成了化学史上第二个重大突破。

案例 2 道尔顿——英国著名化学家。

道尔顿有着深厚的数学功底。他于 1766 年出生在北英格兰一个名叫伊格费尔德的农村，青年时期就对数学有着浓厚的兴趣，并于 1793 年在一所名叫“新学院”学校专门讲授数学和自然科学。

案例 3 阿伏伽德罗——意大利物理学家、化学家。

阿伏伽德罗出生在一个官吏之家，可能因此他最初学习了法律。不过，他于 21 岁时毅然改学数学和物理，后来又在维切利皇家学院担任物理学教授，深受爱戴。其深厚的数学功底，是其后来在物理和化学上取得突出成就的必不可少的因素。



拉瓦锡(1743—1794)



道尔顿(1766—1844)



阿伏伽德罗(1776—1856)

除了以上三位伟大的化学家以外，还有许多著名的化学家，都有着十分过硬的数学基础。由此可见，数学功底对于一名化学家的成就有着十分重要的影响。那么，学好了数学是否就可成为一个好的化学家呢？答案当然是否定的。无论从数学语言或数学技术上来说，它在化学上到底只是一种工具而已，而不能取代化学本身。但是，不可否认的是，当一个化学工作者的数学能力越强时，他所能处理的问题也越多，其成就也必然越大。在力求科技整合的将来，数学无疑是一项更重要的利器。

二、数学在化学上的应用

1. 化学语言的数学化

化学上一个很重要的问题是讨论化学键的形成与分子构造间的关系。自 19 世纪末以来，人们就开始讨论原子之间成键的问题。在开始时人们只是画出分子的构造图，例如氯化汞的构造为 Cl-Hg-Cl，汞与氯之间的化学键只用一条线来代表，对于化学键的构造与原子中电子的组态全然不清楚；氯化汞真正的立体形状也不清楚。而类似的二价钡（Ba）所形成的氯化物，显然在化性和物性上与氯化汞有很大的不同，但为什么不同则不很清楚，化学家尚缺乏一套完整的理论来了解它。

及至 1925 年，由于量子力学的发展，人们才真正了解这一问题的关键。就上面的例子来说，汞与钡原子都有 $6s^2$ 的最外层电子组态，所不同之处是汞原子最低的空轨道是 6p，当与氯原子形成氯化汞分子时，汞所用的混合轨道是 sp，氯化汞的结构乃为线性的。而钡的最低空轨道是 5d，当与氯原子形成氯化钡分子时，钡所用的混合轨道中，也混入了相当部分的 d 轨道，所以氯化钡是非线性的结构，两个 Ba-Cl 键之间的夹角小于 180°。

像这样的例子，在现代化学中的应用可说是普遍的。要了解这些，我们就必须知道轨域的数学代表式及其对称性质等等。这在数学上就牵涉线性代数、偏微分方程与群论的应用。值得注意的是在以上的例子中，数学通常并不是拿来作为计算的工具，反而当作是一种定性的讨论方式，这是非常重要的一点。

又如自 20 世纪 30 年代以来，高分子化学有了长足的发展，新的聚合

体不断发明出来，已成为我们日常生活中重要的一环。这些高分子在溶液中有一共同的特性，即原子与原子在空间连续排列的形式可能很多，即使其相对分子质量与化学结构完全相同也不例外。如图 5-6 所示，其显示出聚乙烯分子中六个碳部分的两种不同的构型；对整个高分子来讲，其不同构型的数目更可达到天文数字之多，此时，我们就不得不以统计的方法来表达它的形状或大小。

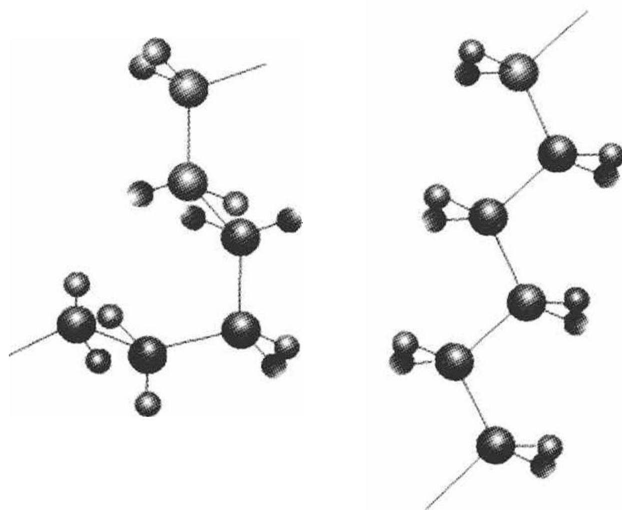


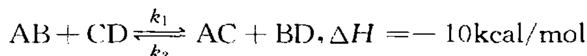
图 5-6　聚乙烯分子中六个碳原子部分的两种不同的构型

譬如说，常常用来讨论高分子性质的一个量是高分子两端距离的平方的平均值——它常常是与相对分子质量成正比的。很多高分子物质的特性，如弹性、扩散系数、散光系数等都与相对分子质量的值有密切关系，于是实验者为了解释他的结果，就必须用统计的语言来表达高分子的物性及化性。而更详细的是由分子基本化学结构来计算高分子的性质，这就涉及更多的统计学知识。诺贝尔化学奖得主 P. J. Flory 的得奖原因之一，即在于他对高分子统计方面做出的贡献。

2. 化学计算的数学技术

前面的例子说明了许多化学上的重要问题，已发展到利用数学语言的方式来表达，所强调的主要是观念的建立。但另一方面，传统的化学在研究及应用时都要涉及计算工作，这些计算虽随问题的复杂程度而应用

到不同层次的数学，但基本上而言，数学在此只是作为帮助我们解决问题的工具，与化学问题的本身无太大的关联。举个例子说，如果我们要知道以下反应的速率：



$$AB + CD \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} AC + BD, \Delta H = -10\text{kcal/mol}$$

其中 k_1 是向右反应的速率常数，k_2 是逆反应的速率常数，则反应速率可用下列微分方程表达：

$$\frac{d[AC]}{dt} = k_1[AB][CD] - k_2[AC][BD]$$

$$\frac{d[AB]}{dt} = -k_1[AB][CD] + k_2[AC][BD]$$

再加上物质间平衡的关系，我们就可以计算反应速率。

这个数学问题很简单，但实际反应往往难得多。如果以上反应受温度影响，则我们需要考虑反应热传导的问题，再如物质本身扩散也影响温度。如果反应机构变得更复杂，写出来的方程式常常会是非线性的，那反应速率的求解就会变成很难的数学问题，需要处理多变量的非线性偏微分方程式。

3. 在化学中应用数学的限制

（1）一门学科能否成功地应用数学是有一定的条件的

一门学科能否成功地应用数学，这需要该门学科发展到一定的水平，人们对研究的对象有了充分的认识，并能以确切的概念加以表达。这样才能应用数学方法对所研究的对象进行定量的表述和分析。另外，一门学科要成功地应用数学方法往往还需要其他学科作为中介，为该学科提供大量的实验方法和技术方法。在过去的化学研究中，由于人们无法直接为该学科提供大量的实验方法和技术方法，人们无法直接观察到物质的分子和原子，加之测量和实验方法有限，以致不能获得足够的关于物质分子、原子的各个方面的信息，所以人们对物质分子、原子及其运动规律的认识是不够的，由所得到的为数不多的测量值是很难用数学语言来描述物质构成和运动规律的，因此，在过去，要将数学方法成功地应用于当时的化学是不符合实际的。

（2）一门学科能否成功地应用数学方法，还取决于数学方法的发展水

平和程度

化学是一门对数学要求较高的学科，虽然有不少数学方法可以直接用来进行化学方面的研究，但往往还需要根据化学所研究的具体内容和对象探索相适应的数学方法。例如薛定谔以微分方程为工具建立了原子的波动方程。波动方程对原子的运动作了精确的描述，给我们提示了原子的新概念。但在当时，波动方程的求解却是一件繁重的工作，对于相对简单的原子、分子，如氯原子、氢分子我们可以求得它们的解，但对于多原子和多原子分子则无法得到它们的解，故影响了它们的应用。因此数学在化学中的成功应用，除了有待于数学的进一步发展，还需要从事化学的人们把数学也作为自己的一门必修课。

4. 群论在化学中的应用

当人们的目光逐渐由传统化学中对中观现象的研究转入到更深层次的、对造成这些现象的物质分子间的相互作用的研究中去的时候，数学中那些精巧的方法、和谐的理论给化学的研究带来了很多有用的工具，群论就是其中的一种。我们在"数学美"一节谈到，"对称"是数学美的主要形式，实际上自然界的各种物质，无论动物、植物还是矿物，其形状或性质均具有某种对称性，甚至包括我们人体。化学家所关注的分子也往往具有普遍的对称性，讨论分子中元素的对称和相应的对称操作之间的关系，正是化学家关心的重点之一。

作为近代数学的一个重要分支，群论正是以对称性为研究对象的。因此，群论恰恰是研究对称性的最好工具，从而在化学中得到了很好的应用。化学专业开设的数学课程中，除了作为基础的、以微积分为主体的《高等数学》之外，还有一门特殊的数学课——群论与化学。

我们从群论与化学各自的特点，就可以看出两者之所以能够结合的理由：

群是一种代数系统，即定义了运算的集合。它符合三条原则：

(1)群上的运算符合结合律；

(2)群中存在单位元，使得对于该集合中的任意元素 a，都有 $ea=ae=a$；

(3)每个群中的元素均存在它的逆元(此处记为 a^{-1})，使得 $a^{-1}a=$

$aa^{-1}=e$。

这是群的一般定义。

而化学中的对称操作有四大类:旋转、反映、反演、像转。

(1)具有 C_n 对称轴的对称操作称为旋转;

(2)具有对称面的操作称为反射;

(3)具有对称中心的操作称为反演;

(4)具有 S_n 像转轴的操作称为像转。

将上述变换对照群的一般定义可见,化学中分子的对称性及对分子的变换符合群的一般定义中的几条原则。例如,结合律——设 α、β、γ 分别为三个旋转,显然 $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$,即旋转满足结合律。其他的同样可以验证,说明这些变换都构成群。一个群可表示为 $(G, *)$,而对应在化学中就可认为 G 为所有对分子的对称操作所构成的集合。

对于数学与化学以群论为桥梁和纽带相结合的具体例子,由于需要用到比较专业的化学知识与术语,这里就不再介绍了。

5. 模糊数学在化学中的应用

从哲学的角度看数学发展,有从常量到变量、静止到运动、必然到或然、明晰到模糊这样几个大的飞跃。模糊数学就是从明晰到模糊这个飞跃时诞生的数学新分支。由于自然界和人类社会本身是千变万化、丰富多彩的,因此事物的性状以及各方面的特征,多数不会是明确的、明晰的。如一个班上的学生中"高个子的集合",就无法准确界定。因此精确的、明晰的数学能够处理的问题,实际上受到很大的局限。而模糊数学的诞生,使得精确的明晰数学无能为力对付的许多问题有了用数学工具解决的可能。

在化学领域也不例外,也有许多概念、参数或指标等数据形式的内涵,无法用精确、清晰的方式表现出来。但是,如果将模糊数学知识与化学知识有机地融合在一起,把模糊数学综合评价、模糊神经网络、模糊专家系统等应用到化学的各个学科和分支,对经典化学知识进行模糊数学描述,特别是对化学研究的前沿领域如波谱剖析、化学在生命科学中的应用等进行模糊数学方法的系统论述,能够向化学宏观领域深化、扩展,能够向化学微观领域渗透,将使化学研究插上明晰数学与模糊数学的双翼加速发展。

第五节　数学在化学中的应用

——元素周期表的发现

化学元素周期律是经过众多科学家大量的工作和资料的积累而发现的。1829年，德国化学家德贝莱纳(J. W. Doberener，1780—1849)首先开始对元素的相对原子质量和化学性质之间的关系进行研究。他发现当时已知的54种元素中，可列出几个元素组，每组包括3个元素，同组内元素的性质相似。1862年，法国矿物学家尚古多(Chancourois，1820—1886)提出了关于元素性质就是数的变化的论点，创造了一个“螺旋图”。1865年，英国化学家纽兰兹(J. A. R. Newlands，1837—1898)把当时已知的元素按相对原子质量大小的顺序排列时发现：从某一指定的元素起，第八元素是第一元素的某种重复，就像音乐中的八度音，他称之为“八音律”。

在这一时期，还有一些科学家做了许多工作，为元素周期律的最终发现开辟了道路。1869年，俄国化学家门捷列夫(Д. И. Менделеев，1834—1907)和德国化学家迈尔(L. Meyer，1830—1895)各自独立地发现了元素周期律。他们对当时已知的各种元素进行认真研究，根据化学活性的顺序、原子价的分类、相对原子质量的大小等，制成了一个化学元素周期表。门捷列夫的元素周期表初步实现了使元素系统化，把当时已发现的63个元素全部列到表里，而且还给未知的元素留下了4个空位，指出了它们的相对原子质量，并预言了这些元素必定存在。后来，这些预言都被证实。

元素周期律的发现表明，自然界的元素不是孤立的偶然堆积，而是有机联系的统一体。同时也表明元素性质的发展变化的过程是由量变到质变的过程，是由低级到高级、由简单到复杂的过程。周期律的发现，拉开了无机化学系统化的序幕，为现代化学系统发展奠定了重要的理论基础。

幼儿园的孩子有这样的练习，第一行的三个图分别画了2个、3个和4个三角形；第二行的第一和第二个图分别画了3个和4个正方形，第三个图空着；第三行的第一和第三个图分别画了2个和6个圆，第二个图空

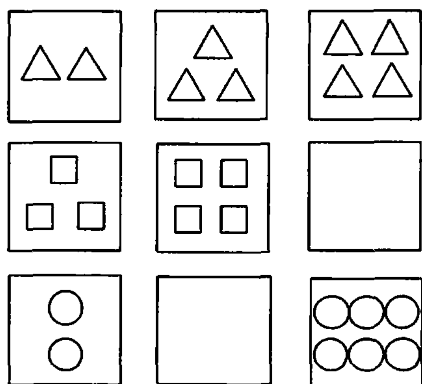


图 5-7　幼儿园的练习

着(图 5-7),要求孩子在空着的框内填上正确的图形。于是聪明的孩子在分析了第一行的基础上,根据第二行和第三行提供的信息,在第二行的最后一个框内画了 5 个正方形,在第三行的第二个框内画上 4 个圆。这就是研究数量特征的初步练习。这种联系包括两个步骤:分析和推断,分析第一行和另外两行,得出每一行中集合图形的数量顺序递增,于是推断第二行的第三个图是该行第二个图的后继,第二行的第二个图中正方形的个数比第一个多 1,于是推断第三个图形中正方形个数应该比第二个图多 1。第三行的第二个图应该是第一个图的后继,但不能填 3 个圆,因为这样会使得该行第三个图成不了第二个图的后继,因此要画 4 个圆,使得每次都增加 2 个。这种分析的方法称为归纳,由特殊情况总结出一般的规律,第二步是推理,将发现的规律用来解决问题。

上述归纳和推理过程看来很简单,但却是非常有用的。最出名的例子应该是门捷列夫发现元素周期表,现在看来其原理就与上述幼儿园游戏一样。

在 19 世纪以前,化学家的主要工作就是研究元素的化学性质,例如一个元素能与哪些元素及化合物反应,反应所得生成物是什么,在反应过程中它的化学价是多少等。曾经有很多化学家为了研究一个元素而在实验室里进行氧化、还原、分解和化合反应,用一堆玻璃器皿排列组合,终老人生。这种情形在门捷列夫提出了化学元素周期表之后得到了根本的改变。

目前普遍使用的化学元素周期表称为门捷列夫元素周期表,它的雏形是门捷列夫在 1869 年给出的。在数学家看来,元素周期表是一个化学元素排列的矩阵,它是以元素的相对原子质量为序排列的;在化学家的眼里,元素周期表的每一行和每一列都是按照化学性质排列的。但是,事实

上，作为化学家的门捷列夫的第一张元素周期表走的是数学家的路线，他是根据元素的相对原子质量——数量的特征，而不是化学性质列出的。

1865 年，31 岁的门捷列夫被彼得堡大学聘为化学教授。与别的化学教授不同，门捷列夫呆在化学实验室里的时间不是很多，而老是一个人躲在房间里摆弄他的“纸牌”。门捷列夫的“纸牌”也与众不同，他的牌有 63 张，与当时已知的元素总数相等，每张纸牌上写着一种元素名称、相对原子质量以及各种化学性质。在门捷列夫时代，原子-分子论已经为广大化学家所接受，化学家们已经认识到分子是物质存在的最小单位，也已经发现可以将几种元素组成一类，这一类元素具有相似的化学性质，并且已经有人研究了同一类中元素的相对原子质量的关系。

门捷列夫赞同元素的化学性质是按照一定的规律变化的观点。作为化学家，他也曾按照化学性质对元素进行排列，但是很难在不同类的化学元素之间找到联系。在用了各种规律对纸牌作排列之后，门捷列夫最终发现按照元素的相对原子质量大小顺序排成一列，在适当的地方换列就能够使同一类的元素排在一行中，这样得到的表能够与当时化学家认识的“类”一致，自然地表达了化学元素之间的规律性。1869 年，门捷列夫在俄罗斯化学协会的年会上发表了第一张元素周期表(图 5-8)。这张表是按照相对原子质量由上至下排列的，但又不同于由上至下的次序，而在适当的位置换列；也不同于相对原子质量的连贯性，在适当的地方留有空格。这些换列和空格就是根据化学性质作出的决定。其后的几年中，他一直致力于对第一张元素周期表的修正，在参考了同行工作的基础上，终于在 1871 年提出了第二张元素周期表。第二张表的排列与第一张表不同，他将同族的元素排在一列中，那张表和现在流行的化学元素的“段表”已经很相似了。

早在第一张周期表发表的时候，门捷列夫就断言：世界上的元素的化学性质是有规律的，元素的相对原子质量是其规律显示的重要特征。门捷列夫在解释他的周期表时说，同一行中的元素组成一个族，它们在化学反应中表现出相同的原子价，而同一列中的元素的相对原子质量和化合价为人类所发现。门捷列夫将这些元素称为“类××”，如类铝和类硼等。在门捷列夫提出元素周期表之际，大家都认为他是荒唐的，甚至他的老师

			Ti 50	Zr 90	? 180
			V 50	Nb 94	Ta 182
			Cr 52	Mo 96	W 186
			Mn 55	Rh 104.4	Pt 197.4
			Fe 56	Ru 104.4	Ir 198
			Ni Co 59	Pd 106.4	Os 199
H 1			Cu 63.4	Ag 108	Hg 200
	Be 9.4	Mg 24	Zn 65.2	Cd 112	
B 11	Al 27.4	? 68	Cr 116	Au 197?	
	C 12	Si 28	? 70	Sn 118	
	N 14	P 31	As 75	Sb 122	Bi 210?
	O 16	S 32	Se 79.4	Te 128?	
	F 19	Cl 35.5	Br 80	I 127	
Li 7	Na 23	K 39	Rb 85.4	Cs 133	Tl 204
		Ca 40	Sr 87.6	Ba 137	Pb 207
		? 45	Ce 92		
		? Er 56	La 94		
		? Yt 60	Di 95		
		? In 75.6	Th 118?		

图 5-8 门捷列夫的第一张元素周期表

也不信任他。反对甚至否定的主要原因，是由于这张表格不是来自化学实验而是来自对元素数量特征的研究。但是不久，门捷列夫推测的元素就为化学家的新发现所证实。1875 年，法国的布瓦博德朗发现了镓，就是门捷列夫称为类铝的元素，门捷列夫甚至还纠正了他在测量镓元素相对原子质量上的错误；1879 年，瑞典人尼尔逊发现了钪，就是门捷列夫称为类硼的元素；1885 年，德国人温克莱尔发现了锗，即门捷列夫称为类硅的元素。

门捷列夫的成功在于他没有按照化学家的传统做法，从化学性质去探索元素化学性质的规律，而是从另一方面，从数量特征去讨论元素的化

学性质的规律。另辟蹊径正是他的成功之道，也是数学方法的牛刀小试。

数学方法在化学中的应用是必然的，这是由科学发展的必然过程以及数学方法所具有的特点所决定的。化学是一门研究物质组成、结构、性质、变化及应用的一门自然科学，同其他自然科学一样，有着同样的发展过程，即从定性发展到定量，从现象发展到本质。要确切地掌握性质、组成及其运动的规律和正确运用其规律，不仅要对物质进行定性的分析，而且还要对物质进行定量的分析。对客观事物进行精确的计算和对其规律进行精确的描述是人们认识过程深化和精确化的根本途径，是精确掌握客观规律的重要手段。

马克思说过："一切科学只有在成功地应用数学时，才算真正达到完善的地步。"例如，物理学中如果不用数学方法对原子核的结构和机制进行定量分析，并用数学的形式表达原子核的内在联系和运动规律，人们就无法精确地掌握原子的运动规律，达到应用原子能的目的。在化学中同样如此。如果我们最终不能用数学的形式描述物质的分子及其运动规律，就谈不上我们已经揭示了物质的构成及其变化的规律，从而也不能成功地应用这些规律解决实际问题。因此，化学的发展必然是从定性的阶段发展到定量的精确描述阶段。而在实现这一过程时，要借用数学方法作为定量的工具，则是由数学方法的特点所决定的。

我们知道数学是研究量与量之间关系的科学，并用形式化的语言来表达，所以它具有高度的抽象性，能够广泛应用于不同的领域。此外，数学还具有严密的逻辑性，它在揭示量与量之间的关系时，不是通过直接实验的方法达到，而是通过一系列的逻辑推理和逻辑证明的方法来实现的，因此它能更深刻地揭露出物质的组成和结构及其本质，使我们对物质的认识更加深入，这一点正是化学科学所面临的挑战和化学进一步发展的标志，所以化学要进一步发展，就必须更好地应用数学。

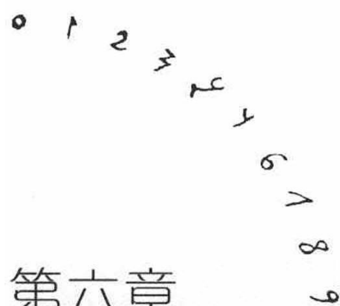
今天，以计算机为代表的技术革命的兴起，促进了各门学科迅速发展，特别是生物学科的迅猛发展，对化学学科的发展产生了极大的影响。首先由于物理学和电子技术的发展，为人们深入了解物质组成和运动规律提供了各种方法和手段。例如，红外光谱、紫外光谱、质谱、磁共振光谱、X 射线衍射光谱，特别是近年来发展起来的近红外光谱、二维磁共振

等技术和各种热力学参数，为我们研究微观物质提供了大量的信息，为人们应用数学方法提供了良好的条件。同时，现在的化学家和数学家密切配合，进行了不少新的适宜于化学应用的数学方法的研究，如信息方法、模糊数学已经在化学中得到广泛的应用。同时计算机的应用又为数学方法在化学中的应用打开了一扇大门。计算机在化学中的应用仅仅才 10 多年的时间，但已产生了化学与数学结合的分支科学。用计算机模拟化学实验、推测可能的化学结构，用计算机进行结构设计，用计算机进行光谱解析，生物芯片实验结果分析处理工作的自动化等，无处不是数学在化学中应用的体现。

综上所述，数学在化学中的应用只会越来越多，越来越广，越来越深。

思考题：

1. 生物数学主要研究哪些内容?
2. 数学在化学中有哪些应用?
3. 举例说明数学对你产生了怎样的影响。



第六章

数学与天文学、地理学的发展

给我空间、时间及数，我可以创造一个宇宙。

——伽利略

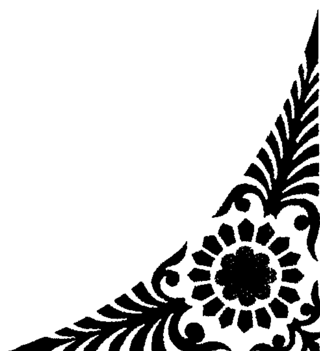
数学对观察自然做出重要的贡献，它解释了规律结构中简单的原始元素，而天体就是用这些原始元素建立起来的。

——开普勒

数支配着宇宙。

——毕达哥拉斯

自然科学的研究对象是(人们观察和研究的)自然现象及其相互之间的联系和规律,一般通过实验的方法进行研究。自然科学学科最重要的辅助工具是数学。它研究用数学和几何元素表达的问题以及用不断发展而更加抽象的形式推导出来的结构和系统及它们之间的关系。自然科学学科的研究方法是观察、描述、比较、整理、概括、测量、假设、建立模型和理论的推理。实验和试验的结果用数学形式、借助数学模型和数学理论表述出来。这种解释的工作体现了这些学科的重大意义,为其他应用学科如天文学、地理学的发展提供理论知识支持。

第一节　数学与天文学发展概述

数学从古代起源，就与很多的实际问题和需要联系在一起。在以后的发展过程中，数学在天文学上的应用，可以说是广为人知的。

一、古代：天文学的附属——数学

现在的理论一般认为，天文学起源于早期的占星术，而占星术是根据星辰所表现出的一些现象来预测祸福。有权利参加占星活动的是一些称为"巫"的人，他们必须有超出常人的知识，正是他们，在长期不懈的观察中发现了一些规律，他们要把这一规律记录下来，于是就出现了早期的文字和数学，这一时期的数学主要是几何学，而数学的出现却明显地促进了天文学的发展。这一时期，人们在几何学的帮助下，得到了测量太阳高度的方法，于是，三角学诞生了。人们在三角学的帮助下，不仅在天文学的范畴内使用了一周天等于三百六十度这一角度表示法，而且利用日影的变化规律制造了日晷和圭表这两种基本的计时仪器，把一天划分为二十四小时（十二时辰），把一年中太阳在黄道的几个特殊位置定为二十四节气，极大地便利了时间的计算和农业生产。同时，天文学和数学在实践中也得到了巨大的发展。

二、中世纪：数学帮助了天文学

随着时间的推移，人类进入了黑暗的中世纪，在这一时代，科学受到了极大的抑制，尤其是天文学，但伟大的科学家们不畏宗教的束缚勇敢地与之斗争，涌现出了哥白尼、布鲁诺、伽利略、开普勒等一大批天文学家。

虽然天文学受到了抑制，但宗教对祈祷时间的精确需求却促进了天体测量学的进一步发展。在天文观测中，人们不仅仅获得了日心说这一定性的结论，更重要的是，解析几何学在这一时期产生了，天文学进入了定量计算的时代，由于解析几何的使用，行星、彗星的轨道被精确计算，日

心说得到了强有力的证明。

解析几何学是在天文观测中获得的方法的总结和升华，是理论和实践相结合的产物，是人类对神学进行挑战的锐利武器和丰硕成果。解析几何的出现不仅使数学得到了壮大，也为天文学的发展奠定了坚实的基础。解析几何从天文中来到天文中去的现象向我们说明，知识只有在不断的使用中才能得到巩固和升华。

有了解析几何这一工具，天文学在日月食预测上由感性认识上升到理性认识，从观察上升到了理论计算，同时也增强了人们对神学的否定。

由于我国数学的特色——我国数学并非建立在逻辑推理而是建立在算法的基础上，所以我国的数学不幸落后了，我国的天文学也终究没有上升到理论高度。这表明数学作为一门基础学科，对各项科学研究都有着极大地促进作用，对数学的学习不仅使我们思维缜密，而且会对我们以后的学习和研究产生极大的促进和帮助。

三、近代：两个成熟的学科

科学的发展使神学彻底败给了科学，文艺复兴后，科学极大地发展了，特别值得一提的是代数学的极大发展，微积分的发明不仅造就了牛顿和莱布尼兹这两位科学家，而且使几乎所有的科学得到了突飞猛进的发展。天文学也不例外，微积分使所有的行星和彗星轨道得到了精确表述，天文学在这一时期也发展成为一门庞大的基础学科。

天文年历现在已成为了许多天文及测绘工作者的普通工具书，但年历的项目总是有限的，要进一步提高其精确度就必须使用内插法。这一时期，牛顿内插法、白塞尔内插法等内插法全部出现了，尤其是白塞尔内插法，至今还在各国的天文年历中使用。值得一提的是，我国早在唐代的《大衍历》中就使用的等距内插法，是当时世界上最先进的。

对数在这一时期也发展了。众所周知，天文学家要处理极大而且繁多的数据，如何简化计算早已是所有数学家研究的方向。对数以其方便的计算成为天文学家广泛使用的计算方法，被 18 世纪天文学家拉普拉斯评价为“用缩短计算时间延长了天文学家的寿命”。

四、现代:大一统

时间进入 20 世纪,物理学成为主流科学,量子力学、相对论的发展为天体物理学的发展提供了强有力的工具。

天文学的对象黑洞和虫洞是无法被直接观察到的,数学,这一工具又被天文学家使用了,用数学模型来描绘这些天体,使人们可以间接地研究这些天体,并取得了一些成果。

时间旅行也被数学描述出来了,相信在不远的明天,我们可以实现这一人类最美好的梦想!

第二节　数学在天文学中的几个应用

一、中国古代历法中内插法的应用与发展

内插法是计算数学中最常用的工具之一,也是函数逼近的重要方法,在天文学、统计学、应用工程学及数学本身都有广泛的应用。中国古代数学和天文历法关系密切,许多数学的新发明或者是因历法的需要而产生,或者首先应用到历法上去。从西汉到元代,由于历法推算的需要,使内插法不断得到应用和发展,其中许多成果处于世界领先地位。

一次等间距内插法、等间距二次内插法、不等间距二次内插法、三次内插法是中国数学史和天文学史上的伟大成就,作为中国古代数理天文的核心工具,从西汉到元代年间,内插法得到广泛的应用。内插法在宋元以前没有专名,至元代郭守敬才引入了“平立定三差法”、“招差法”等术语。《授时历》之所以能够成功地沿用刘焯的算法思想构造出三次插值算法,主要归因于郭守敬天才地将 $f(x)$降为 $f'(x)$,把问题转化为低一阶插值公式的构造。这标志着中国古代数学家从二次到高次插值方法的演变,使中国历算方法获得了突破性的进展。在国外,印度的婆罗门笈多于公元 628 年用等间距内插公式计算正弦值;阿富汗著名科学家阿尔·毕

鲁尼(973—1048)在计算正弦值和正切值时也用了等间距二次内插公式！在西方，17 世纪英国的一批数学家相继对内插法的应用和完善做出了贡献，纳皮尔(J. Napier，1550—1617)、布里格斯(H. Briggs，1561—1631)、沃利斯(J. Wallis，1616—1703)、格列高里(J. Gregory，1638—1675)，以及牛顿(I. Newton，1642—1727)、泰勒(B. Taylor，1685—1731)都曾致力于研究内插法！因牛顿在他的著作中(1676，1687)多次采用，故有"牛顿内插法"之称！但中国刘焯的二次内插法早于牛顿 1000 多年；就是郭守敬的三次内插法，也比"牛顿内插法"早近 400 年，所以著名科学史专家、英国人李约瑟博士认为："中国的这种方法似乎是显著地领先的，因为欧洲直到十七八世纪才采用并充分掌握这种方法。"

二、《大衍历》日躔(chán)表的数学结构及其内插法

《旧唐书・历志》和《新唐书・历志》载有僧一行主持编撰的《大衍历》。《大衍历》日躔表是一份四次差分相等的数表，反映一行对太阳运动复杂性的深刻认识。一行调整插值引数为不等间距型，并认为具有降阶作用，因而能够采用二次函数完成四次差分表的插值计算。但一行对插值间距只利用差分方程作了第一次逼近，没有进行迭代计算，从而影响了计算精度。

对高次差分表的插值计算，一行以及后来的郭守敬都采用将函数降次的办法，用低次插值函数来解决高次差分表的计算问题。一行通过调整插值间距为不等间距的方式来降阶，试图用二次函数来解决问题。

人们根据差分表引数的间距是否相等以及插值函数的阶次，将内插法分为等间距及不等间距某次内插法，郭守敬算法叫做等间距三次差内插法，一行算法被称为不等间距二次差内插法。引数间距是否相等以及插值函数的阶次，只是数学表现形式的不同，并不反映运动的物理本质，等间距及不等间距内插法都能反映太阳视运动不均匀性的现象。本质差别在于差分表的次数，差分表在某次差分相等反映某种运动性质。

三、中国古代的月食时差算法

中国古代历法中的月食时差算法是为了修正定望和食甚时刻之间的

时间差而设计的。该算法为《大衍历》所首创，此后，《钦天历》、《纪元历》、《庚午元历》和《授时历》等历法均设计了相应的算法。通过构造月食时差算法的理论模型，证实月食时差算法是必要的，中国古代历法中设计的月食时差算法应该与月亮视差无关，由此反驳了朱载堉对《纪元历》等历法中的月食时差算法的批评。

四、古代中印勾股测望术

勾股测量法是勾股定理的实际应用，在古代中国和印度都曾出现过，而且两国的许多数学著作与天文学著作中都有勾股测量法的记载。两国的勾股测量法由测量太阳高度和晷影长度发展起来，并随着实际问题的需要日益提高。由于社会生活和生产需求的一致，中印两国勾股测量方法存在很多的共性，但都是在各自的本土文化中发展起来的，没有受到外来文化的影响。

1. 中国古代勾股测望术的演变——从勾股比例论到重差术

(1)《九章算术》"勾股"章是中国古代最早的系统的勾股理论，该章第21至23问分别为用"表"进行勾股测望的问题。受测量工具和测量目的的限制，这些测量都是通过勾股比例论完成的。第21问为立表测远问题，第22问为立木测山高问题，第23问为立木测深度问题，其中，第22问与《周髀算经》中的"周髀"测日一样，是利用单表的测量问题。

(2)从日高术到重差术

"重差"一词，初见于《周礼·地官保氏》"九数"之郑玄注，张衡在《灵宪》中也曾提到。但现在所谓的重差术，是指刘徽《海岛算经》中利用多重勾股关系以求高远的方法。重差法是利用两根等高的晷表计算日之高远的勾股测量方法，因计算公式中通常出现两个差式而得名。重差法常用于测量不可到达的极远距离，对于复杂情况还需要"重表"、"累矩"等多次测量。

(3)李淳风的斜面重差术

上述"重差"问题都是在以基准面为水平面的前提下进行测算的。唐代李淳风注《周髀算经》"日高术"时，指出传统地平观念的错误，认为，"然则天无别体，用日以为高下，术既随平而迁，高下从何而出？语术相违，是

为大失”。于是由“地有高下表望不同”，通过相似形性质把斜面转化为平面，解决了在斜面上测高、深、广、远问题，造了“后六术乃穷其实”，使刘徽的重差理论得到进一步推广。其中，第五术为平面重差问题，第六术指出外衡不合地平，从而例证了传统地平观的错误。前四术（前下术、后下术、邪下术、邪上术）是李淳风针对斜面大地设计的斜面重差法。

（4）《数书九章》中的测望术

南宋秦九韶《数书九章》中测望类的“望山高远”、“临台测水”、“徒岸测水”、“表望方城”、“望敌远近”、“表望浮图”六个问题和军旅类“望知敌众”都是勾股测量问题，也是勾股比例论和重差术的应用，但方法与前人有所不同，问题设计也更加多样。《数书九章》是继《海岛算经》之后又一部系统涉及勾股测量问题的著作。秦九韶在解决《数书九章》测望类问题时，反复用到“以勾股重差求之”，但此处的“重差”并不是刘徽定义的“重差”，而是指勾股比例论。

2. 古代印度的勾股测影术

勾股测量也是古代印度数理天文学的基本内容，影的测算是古代印度数学和天文学的一个重要组成部分，涉及求物体高度、影与物体间的距离、影长等问题。测量中用到单矩、复矩，有时还通过水面折射影求物体高度。印度许多数学、天文学著作中载有这类问题，如阿耶波多的《阿耶波多历法书》、婆罗摩笈多的《婆罗摩笈多修正的体系》、婆什迦罗二世的《莉拉沃蒂》等。其计算多以相似三角形理论为基础，以三率法（或三数法则）为计算原则，形成了古代印度的测望理论。

五、天文历表的逼近方法

天文历表的逼近研究在空间技术、天文仪器的自动控制、天文导航等方面有很大用途。利用多项式逼近天体位置的方法进行探讨。对于等间距列表数据，采用局部点内插和全区间逼近相结合的方法计算切比雪夫级数系数以及用切比雪夫拟合计算其最佳拟合式等两种算法。

采用 n 次多项式 $P_n(x)$ 在有限闭区间 $[a,b]$ 上一致逼近连续函数 $F(x)$ 时，$\mu=\max\limits_{[a,b]}|P_n(x)-F(x)|$ 称为最大偏差。$F(x)$ 的 n 次最佳逼近多项式 $P_n^*(x)$ 是指在所有阶数不大于 n 的逼近多项式集合 V_n 中使最大偏

差为最小的那个多项式：

$$\max_{[a,b]}|P_n^*(x)-F(x)|=\mu^*=\min_{P_n\in V_n}\max_{[a,b]}|P_n(x)-F(x)|$$

如果 $F(x)$ 表示天体位置，则对于指定的历表精度 ε，逼近多项式必须满足

$$\mu=\max_{[a,b]}|P_n(x)-F(x)|\leqslant\varepsilon$$

而且多项式次数 n 越低越好。显然，采用最佳逼近式来提供天文历表固有精度的逼近式是最理想的。

第三节　数学与地理学的发展

数学是研究世界的一种科学方法和科学语言，地理学也不例外，自其产生之日起，就与数学有着不解之缘。随着地理学的发展，与数学的关系也越来越密切。

一、地理空间的数学定义

1. 地理空间事物的椭球面定位

(1)地球椭球

大地水准面包围的地球形体比较接近真实的地球形状，但仍是一个有 100m 起伏幅度的复杂曲面，不能用简单的数学方程表示，更难以在此面上进行简单而又精密的坐标和几何计算。在现代大地测量中，规定参考椭球是等位椭球或水准椭球，即参考椭球与正常椭球一致。一个等位旋转椭球由 4 个常数定义，这 4 个常数是赤道半径 a、地心引力常数 G_M、动力形状因子 J_2、旋转速度 ω。根据这 4 个常数，可以得出一系列导出常数。根据地球的扁率 f，可以求出椭球短半径 b，从而可用数学方程表示一个已知长半径 a 和短半径 b 的椭球。

(2)地心笛卡儿坐标系

以地心 O 为坐标原点，选择赤道平面上一组相互垂直的直线为 x、y 轴，而以地轴为 z 轴，这样的坐标系称为地心笛卡儿坐标系，记作 DK。若以地球参考椭球的长半径 a 和短半径 b 作常数，则地球椭球面也可

定义。

定义 存在地球椭球的长半径 a 和短半径 b，若点集满足

$$S=\{c\mid c=(x,y,z)\in DK\wedge\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1\}$$

则称 S 为以 a 为长半径、b 为短半径的地球椭球面，其中 $2b$ 为地轴兼旋转轴。

二、中国古代地图的数学基础与地理空间维度认知

当中国古代地图发展到以"计里画方"进行地图绘制时，已经实现了3维地理空间的科学认知。

1.1维地理空间的认知表示

（1）原始地图的描述性数学基础

《山海经》中有一段描述："南山经之首曰鹊山。其首曰招摇之山，临于西海之上，多桂，多金玉。……又东三百里，曰堂庭山，多白猿，多水玉。又东三百八十里，曰猿翼之山，其中多怪兽。又东三百七十里，曰木丑阳山。"这表明，在这些古代地图中，描述两点之间的相互距离和方位用的都是相对距离，因为它们没有具体的表示方法，只是用文字进行距离和方位的描述，或画出大概的图形，因此称其为地图的描述性数学基础。

（2）描述性数学基础的数学解析

在数学上，第一个有维度的是线。不论主动或被动，线的形成来自于由一个点延伸到第二个点，这个点自己向"外"挑选某个位置，即方向。这就是1维空间。在《山海经图》中，方向只有东、西、南、北4个，是个大致的方向。而图上表示的也是相对位置，没有统一的坐标原点。每一个位置都是相对于它前一个位置的线的表示，因此说它是1维空间的认知表示。

2.2维地理空间认知表示

所谓2维空间就是由无数的线构成的平面。在经历了长期的实践后，中国古人对2维地理空间有了深入的了解，并学会了在平面上表示。这期间，地图上出现了两种数学基础，分别是"闭合曲线"和"矩形网格"。这两种地图平面数学基础的演进，正体现了中国古人对2维地理空间的认知表示由粗略到精确的过程。

数学基础"矩形格网"的数学解析，根据长沙马王堆出土的汉代地图以及以往的经验，格网起始点可能是国都，或是本图中重要的城镇等。它已非常接近现代的直角坐标系，在这幅图中，不仅两点之间的距离，而且它们的方位也可以准确确定。因此，是对 2 维地理空间的精确认知。

3. 3 维地理空间的精确认知表示

(1)数学基础"计里画方"

如果把"计里画方"当作地图的一种数学基础的话，它的理论依据是"制图六体"，即绘制地图有六条法则：分率、准望、道里、高下、方斜、迂直。其基本含义为：分率表示比例；准望是用方里网(Kilometer grid，在地图上按平面直角坐标系的一定纵横间距，在地图上划分的格网)表示方位，准是横线，望是竖线；道里表示路程里数；高下(高程)、方斜(曲折)、迂直(迂回)是地形、道路形状对里程的影响因素。这 6 条法则运用时互为参考，综合运用，把地图的比例尺、方位和距离 3 个基本要素与自然界表象通过法则得以在地图上体现。

(2)"计里画方"的数学解析

谢庄根据裴秀的平面方丈图改制成立体的地形模型，这个制作，虽是原始的地形模型，但在当时世界上也是独一无二的。可以说，根据"制图六体"制作的地图是实地地形的 3 维数学模型。也就是说，根据裴秀"制图六体"制作的地图上的地物，已具有高程意识。因此说它是 3 维空间的认知。

三、现代地理学中的数学方法——它的形成和发展

数学方法，不仅是人们进行数学运算和求解的工具，而且能以严密的逻辑和简洁的形式描述复杂的问题，表达极为丰富的实质性思想。数学方法是现代地理学研究中必不可少的重要方法之一。

1. 地理学，自其产生之日起，就与数学有着不解之缘

在古代，地理学与数学之源泉科学——几何学，几乎都是研究地表的。正如《辞海》关于几何学的解释那样："古代埃及为兴建尼罗河水利工程，曾经进行过测地工作，它逐渐发展为几何学。"因此，在来自希腊文的西方文字中，几何学有"测地"之意，如其英文为 Geometry，与地理学(Ge-

ography)、地貌学(Geomorphology)、地植物学(Geobotany)、地生态学(Geoecology)等术语有着一个共同的前缀 Geo。在古代地理学时期,人们为了测算河流长度、山体高度,计算土地面积,不得不运用几何学原理和方法。古希腊学者艾拉托塞尼(Eratcsthenes)测算地球周边,就是运用了几何学原理和方法。在近代地理学时期,经济学中的区位论被移植到地理学中,开了地理学运用分析数学之先河。20 世纪二三十年代,地理学研究中的统计方法开始萌芽,并开始进行地理要素的统计概括和相关关系探讨。这些事实充分说明,数学方法对于地理学家来说,并不陌生。但是,在古代地理学中,运用数学方法仅仅是为了描写地理事件、地理事实和记载地理知识;在近代地理学中,运用数学方法,又只是局限于对地理现象的解释性描述;而在现代地理学中运用数学方法,则是为了更深入地进行定量化研究,以揭示地理现象发生、发展的内在机制及运动规律,从而为地理系统的预测及优化调控提供科学依据。现代地理学中数学方法的出现,反映了地理学朝着定量化方向发展的新趋势。这种新趋势就是在地理学研究中,以定量的精确判断来补充定性的文字描述的不足;以抽象的、反映本质的数学模型去刻画具体的、庞杂的各种地理现象;以对过程的模拟和预测来代替对现状的分析和说明;以合理的趋势推导和反馈机制分析代替简单的因果关系分析;以最新的定量化技术革新地理学的传统研究方法。

现代地理学中数学方法的产生与形成,可以追溯到 20 世纪 50 年代末期。今天,我们所说的现代地理学中的数学方法,就是在 50 年代末开始的计量运动的基础上进一步发展的产物。

2. 现代地理学中数学方法的发展阶段

现代地理学中的数学方法,作为一门新的方法论学科,其历史并不算长,但发展速度是十分惊人的。自 20 世纪 50 年代末期开始的计量运动以来,现代地理学中的数学方法已经历了三个发展阶段。

第一阶段,大致从 20 世纪 50 年代末到 60 年代末,是现代地理学中的数学方法发展的初期阶段。其主要特点是把统计学方法引入地理学研究领域,构造一系列统计量来定量地描述地理要素的分布特征,比较普遍地应用各种概率分布函数、平均值、方差、标准差、变异系数等统计特征参

数以及简单的两要素间的一元线性回归分析方法。从今天的观点来看，这些方法是比较浅易的。但是，它却给长期以来只是定性描述的地理学带来了可喜的变化。许多过去无法准确确定的概念，如分布中心、区域形状、地理要素分布的集中和离散程度等都有了定量指标；许多地理要素之间的相关关系，可以定量地表示了。这一时期，出现了许多专门探讨和介绍数学方法（主要是数理统计方法）的地理专著，如东坎和仇佐里合著的《统计地理学》（1961）、加里森和马布里合著的《计量地理学》（1967）、金（L. J. King）所著的《地理学统计分析》（1969）等。

第二阶段，包括20世纪60年代末到70年代末的10年时间，属中期阶段。该阶段的特征是多元统计方法和电子计算机技术在地理学研究中的广泛应用。地理学研究对象的多因素、复杂结构和动态特征都使简单的统计方法无能为力，为此就必须寻求解决复杂的地理问题的有效方法。正是在这一时期，电子计算机的生产已经工业化，使用计算机的方法也从一般人很难掌握的机器语言程序发展到高级算法语言程序。随着计算机科学的这种变化，多元统计方法如雨后春笋般地发展起来，成为数理统计学中特别有生命力的分支之一。过去用手算很难完成的复杂计算问题，运用计算机很快就可以得出结果。以电子计算机技术为手段，许多地理学家熟练地掌握了多元统计方法，具备了分析复杂的地理问题的能力。在自然地理学、经济地理学和人文地理学中，以电子计算机为工具，运用多元统计方法使许多复杂问题得到了相当满意的解决。

第三阶段，从20世纪70年代末开始，是现代地理学中的数学方法走向更加成熟和更加完善的阶段。不但包括了概率论与数理统计方法，还包括了运筹学中的规划方法、决策方法、网络分析方法，以及数学物理方法、模糊数学方法、分维几何学方法、非线性分析方法等，而且也包括了计量经济学中的投入产出分析方法等。更值得一提的是，在这一阶段，地理学中的数学方法的发展与现代系统科学紧密地结合起来了。系统理论、系统分析方法、系统优化方法、系统调控方法等被引进了地理学研究领域。系统科学原理和方法的引入，促进了地理学向着具有更加严密的理论结构和现代化方法的方向发展，从而使以发展地理学方法论为己任的现代地理学中的数学方法更加明显地具有系统科学的性质与理论性的色

彩。同时，电子计算机应用技术的发展，特别是GIS技术的成熟，为数学方法在现代地理学中的应用提供了更加先进的技术手段，从而使其应用的范围更加广阔。

（1）地理要素、事物间关系分析

地理系统是一个复杂的巨系统，内部的要素数目众多，要素之间的关系及相互作用机制复杂，数学方法的运用主要是相互关系分析。相互关系分析研究主要是对地理要素、地理事物之间的相互关系进行定量分析。

（2）地理事物类型分析

地球表层空间系统中任何地理实体、地理要素、地理现象、地理事件、地理过程，其产生、存在和发展都离不开具体地理位置和地域空间范围。地理学数学方法中的类型研究主要是对地理事物的类型和各种地理区域进行定量划分。

（3）地理系统分析

由于地理学的研究对象——地球表层空间系统是一个复杂开放的巨系统，因此对它的研究必须从系统的角度着手，数学方法在地理系统中的运用主要有以下三个方面：①地理系统的仿真研究：这类研究针对的是地球空间系统这个复杂开放的巨系统。先把这个巨系统用类型分析方法定量划分出一系列的子系统，然后在对子系统要素之间的相互关系与反馈机制进行分析的基础上，构造出系统结构，建立描述系统的数学模型，并以适当的计算方法与算法语言，将数学模型转化为计算机可以识别与运行的工作模型，通过模型的运行，对真实系统进行模拟与仿真，从而达到揭示系统的运行机制与规律的目的。②地理系统的优化调控研究：这类研究主要是运用系统控制论的有关原理与相关的方法，研究人地关系地域系统的优化调控问题，寻找PRED（人口、资源、环境、社会系统）协调发展的方法、途径与措施。③地理系统的复杂性研究：由于地理系统的高度复杂性、不确定性等因素对它的研究带来了极度的困难，对地理系统的复杂性研究可以为地理系统研究提供思想范式与模式参考。但是，关于地理系统的复杂性研究，目前还没有一种非常有效的方法，地理学家只能针对不同的问题，从不同的角度运用突变理论、分形理论、小波分析、人工神经网络等非线性方法做一些力所能及的研究。

（4）地理过程的模拟与预测研究

任何地理事物、地理现象的空间秩序不是一成不变的，它是时间序列的函数，即都随着时间的变化在不断地运动和变化着。地理过程的模拟与预测研究，主要是通过对地理过程的模拟与数学拟合，定量地揭示地理事物、地理现象随时间变化的规律，从而对其未来发展趋势作出预测。

四、地理数学方法：从计量地理到地理计算

计量地理学有广义和狭义之分。广义的计量地理学内容广博，包括所有借助数学工具的地理研究分支；而狭义的计量地理研究，主要是指以统计分析为核心的地理学量化处理和计算方法。早先的定量地理学可以概略地分为数学地理学和统计地理学，前者对应于理论地理学，后者对应于狭义的计量地理学。前者着重于地理学的建模与推理，目标是建设地理学的基础理论；后者着重于观测数据的整理与分析，不必以建立基础理论为目标，主要是运用数学方法来分析实际问题。数学地理学是理论地理学的核心，但数学地理学并非都是定量分析，因为并不是所有的数学模型都要与数据进行拟合；而统计地理学则一定是计量分析。但是，如果需要对数学模型进行拟合检验和参数考察，则数学地理学研究有时需要用到统计地理学的有关方法或者分析技术，如回归分析等。

定量地理学首先是整理地理观测数据的工具，然后在构造假设、建立地理数学模型、发展地理学理论方面提供可行的方法基础。英国著名定量地理学家 Fotheringham 的一种观点认为，定量地理学主要由如下活动构成：空间数据的数值分析；空间理论的开发；空间过程的数学模型的建设与检验。所有这些活动的目的都是为了加强我们对空间过程的理解。理解空间过程可以是直接的，也可以是间接的——在后一种情况下，空间过程需要借助一定的逻辑推断才能得以认识。

五、地理哲学与数学方法论

尽管地理学自产生之日起就不断应用数学方法，早自毕达哥拉斯以来，就有一种数学传统，且经过 20 世纪的“计量革命”，使地理学中数学方法的应用提高到相当水平，但新的地理问题的出现和对地理问题的求解要求

越来越高和越来越精确，使地理学家不得不引入最新的数学方法和数学理论，来满足地理学发展的需求。地理数学方法论势必成为地理学哲学的一项重要任务。

从地理哲学的高度看，地理学中的数学方法主要包括地球表层空间分析、地理要素关系分析、地理事物类型分析、地理系统分析和地理过程的模拟与预测等具体运用。

地球表层空间系统是地理学的研究对象，数学方法在地球表层空间分析中的应用主要有：①分布型分析，主要是对地理要素的分布特征及规律进行定量分析；②网络分析，主要是对水系、行政区划、经济区域等的空间结构进行定量分析；③趋势面分析，主要是运用适当的数学方法计算出一个空间曲面，并以这个空间曲面去拟合地理要素分布的空间形态，展示其空间的分布规律；④空间相互作用分析，主要是定量地分析各种“地理流”在不同区域之间流动的方向和强度；⑤空间扩散研究，主要是定量地揭示各种地理现象，包括自然现象、经济现象、社会现象、文化现象、技术现象等在地理空间的扩散规律；⑥空间行为研究，这类研究主要是对人类活动的空间行为决策进行定量研究。

六、模糊逻辑在土壤连续分类和制图表达中的应用

常规土壤调查制图主要基于土壤空间变异的不连续、离散分布假设，认为土壤类型在地理空间上具有明晰的界线，因而土壤图斑边界线主要依据景观（地形、母质、植被等）对土壤的“映像界线”确定。常规土壤调查的最终输出结果在视觉上被表达为众所周知的等值图（chorop leth map），相似土壤的地理分布通过图例被均质的、边界清晰的图斑实现表达，图斑的属性用“代表性土壤剖面”定义，土壤变异被认为只发生在边界上，土壤在属性空间和地理空间上均被高度概化。由于常规土壤调查中应用的概念模型假定分类空间（taxonomics pace）和地理空间均可以清晰地划分和勾绘，因此被称为“双清晰模型”（double crisp model）。

“双清晰模型”无论在处理土壤属性空间上的分类还是地理空间上的制图单元勾绘时，遵循的是布尔逻辑：空间上的任意一个区域，无论属性空间还是地理空间，属于且只属于唯一的土壤单元，这个区域对于某种土

壤类型的隶属度要么是 0(完全不属于这个土壤类型或者所属土壤类型完全不在图斑内),要么是 1(完全属于这个土壤类型或者所属土壤类型完全在图斑内)。

以区域化变量为理论基础、以变异函数或半方差函数为基本工具的地统计学从 20 世纪 80 年代初期就开始应用于土壤学领域。地统计学首先被用于揭示单一土壤属性的空间变异,随之拓展至土壤属性多变量以及土壤变异多元指数研究,进而被应用于定性变量和土壤变异的多尺度、嵌套尺度研究。然而,在运用地统计学手段处理土壤空间变异时,无法有效地解决土壤类型和土壤属性空间的边界连续问题,这使地统计学方法在复杂土壤景观条件下的应用遭遇严重挑战。

20 世纪 80 年代后期,模糊逻辑理论开始应用于土壤分类学研究。模糊逻辑模型的最终输出结果是土壤或土壤性状在属性空间上的连续分类。基于模糊逻辑土壤分类的最终输出结果不再是非此即彼的概率(probability)或可能性(likelihood)陈述,而是明确表示为目标土壤对于多个目标类别的多重相似性。基于模糊聚类方法产生的土壤分类是连续的,与地统计学方法相结合,从基础上解决了困扰常规土壤调查的土壤属性空间和地理空间上的渐变问题,其输出信息更接近于地理真实,并可以通过已知事实(verifiable facts)进行验证。同时,模糊算法是一种非层级式多变量数据分析方法,使在模型与研究对象之间建立清晰的科学联系成为可能。

思考题:

1. 举例说明数学在天文学中的应用。
2. 举例说明数学在地理学中的应用。



第七章

数学与社会科学的发展

给我最大快乐的，不是已懂得知识，而是不断的学习；不是已有的东西，而是不断的获取；不是已达到的高度，而是继续不断的攀登。

——高斯

数学主要的目标是公众的利益和自然现象的解释。

——傅立叶

不管数学的任一分支是多么抽象，总有一天会应用在这实际世界上。

——罗巴切夫斯基

社会科学研究的是人类社会、现实世界的各种现象和关系，主要包括政治、经济、文化等几方面，它们的任何一种物质形态及其运动形式都具有一定的数量关系和空间形式。马克思曾说，一种学科只有当它达到了能够运用数学时，才算真正发展了。在社会发展的进程中，数学不断地渗透到社会科学的各个领域，它在促进社会发展的同时也丰富了自身。

目前，在传统的社会科学中，经济学是最成功地实现数学化的学科，成就令人瞩目。自 1969 年设立诺贝尔经济学奖以来，超过三分之二的获奖者是由于在经济领域运用数学方法获得重大突破而获奖的。微积分、集合论、拓扑学、实凸分析，以及概率论在研究和表达社会科学方面起了重要的作用。

不难发现，数学方法在合理地设计各种政治体系并保证其正常运作方面有着至关重要的作用。

在当今的军事理论和国防战略研究中，使用了许多复杂的现代数学理论和方法。





第一节 数学与政治

一、人口论

人口问题，对于一个国家来说是非常大的问题。如果不能很好地控制人口的过快增长，不仅会造成资源的过度消耗，而且新增的财富与新增的人口相比也显得入不敷出。我国目前经济总产值并不低，可被人口一平均却排在了世界中等偏下的位置。随着社会的进步、生产力的发展、生活条件和生活环境的改善，人的寿命越来越长，人口增长的速度也越来越快。



马尔萨斯(1766—1834)

托马斯·罗伯特·马尔萨斯(1766—1834)，英国经济学家，近代人口问题研究的先驱。1798年他匿名发表了《人口原理》(第一版)，引起了广泛关注。200多年来，很少有其他著作像《人口原理》那样可以引起人们截然相反的评价。

《人口论》的出现及其成为人们关注的焦点并非偶然，而是有其深刻的历史背景。18世纪30年代开始的产业革命，在经过上百年的时间后，已经基本上完成了从工场手工业阶段到大机器工业阶段的过渡。产业革命在推动社会发展的同时也带来了恶果：一方面广大的小生产者特别是农民迅速破产，不断加入无产阶级的队伍；另一方面，随着资本主义有机构成的提高和剥削的加重，工人大量失业，形成了资本主义的相对过剩人口。工人、农民陷入了贫困、失业和苦难的深渊，从而导致贫富差距、阶级矛盾的加剧。这种情况引发了思想界对未来社会走向的全面关注和讨论。马尔萨斯的“人口论”就是在这一背景下产生的。马尔萨斯的“人口

论"主要包括三个基本内容。

两个公理：马尔萨斯接受了欧几里得的演绎模型。他把下面两个公设作为他的人口学的出发点，他认为，人类自古以来一直遵循着两个不证自明的公理："一是食物为人类生存所必需，二是两性间的情欲是必然的，且几乎会保持恒状。"因此，"人口的增殖力无限大于土地提供人类生活资料的能力"，这两者的矛盾决定了人类永远不会"完善"或"至善"，人类社会的发展始终要受到这对矛盾的制约。马尔萨斯的全部人口思想是以这两个公理为基础的，其他的观点也都是从这两个公理中推理演绎得到的。

两个级数：物质资料是按照1、2、3、4、5、6、7、8、9、10…的算术级数列增长的；人口是按照1、2、4、8、16、32、64、128、256、512…的几何级数列增长的。人口增殖力和土地生产力是不平衡的，前者要大于后者，即人口的增长总比物质资料的增长要快，因此就不可避免地出现绝对的人口过剩。

两个抑制：是指两个"阻止"人口增长的手段或力量。积极抑制（许多的学者认为现实抑制更为确切），即通过贫困、罪恶、饥饿、瘟疫、灾荒、战争等来抑制人口的增长和消灭现存的多余的人，使物质资料与人口之间保持平衡。消极抑制（又称道德抑制），即通过晚婚、不结婚、不生育等来阻止人口的增加，实现人口增长和生活资料的增长一致。前者是一种自然的、客观的手段，一般来说，也是不以人的意志为转移的。后者是一种人为的、自觉的、主观的手段。

马尔萨斯发表的著名的《人口论》，提出了警惕人口过快增长的问题。他说，如果人口扩张到生活资料不足以维持人们的生存时，就会引发饥饿、疾病甚至战乱。他认为人口增长的速度与现存人口数成正比。他的观点和忠告都是正确的，可关于人口增长速度的判断是有失偏颇的。他是根据18世纪的情况作出这样的判断的。18世纪地广人稀，人们可以肆无忌惮地按自然规律繁殖。而在现今社会，人们对环境以及资源的认识、生活方式的改变都会影响到人类的繁衍，马尔萨斯人口论的增长速度就不合适了。

由马尔萨斯的人口增长速度与现有人口成正比的理论，推出了马尔萨斯人口预报公式：

$$P(t)=P_0e^{a(t-t_0)}$$

其中，P_0 是 $t=t_0$ 时的人口数，α 是人口增长率，$P(t)$ 是 t 时的人口数。

看吧，按这个公式，人口是呈指数增长的，多么可怕！

1965 年 1 月，当时世界人口数是 33.4 亿（即 $t_0=1965$ 时，$P_0=33.4$ 亿），那时人口增长率为 $\alpha=0.02$，于是

$$P(t)=33.4\times10^8 e^{0.02(t-1965)}$$

设经过 T 年后人口比原有人口翻一番（2 倍），则

$$2P_0=P_0 e^{0.02T}$$

两边取对数得

$$\ln2=0.02T$$

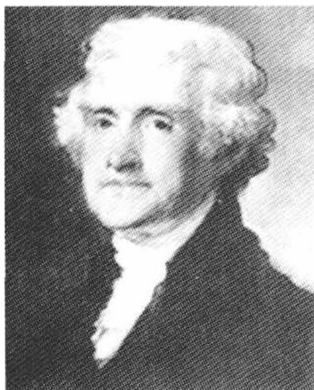
$$T=\ln2/0.02\approx34.6$$

即每经过 34.6 年人口翻一番。根据这样的推算，到 2515 年，世界人口将达到 200 万亿。这是个什么概念呢？有人曾设想这样的情景：江河湖海水面上都一艘挨一艘地布满了船，船上面都站上了人；在沙漠、雪山甚至喜马拉雅山高峰顶上也站上了人。那么，此时人均占地面积也只有 0.87 平方米，连躺下睡觉的地方都不够！幸亏马尔萨斯人口论的数学模型有问题，否则这是多么可怕的前景！

20 世纪 50 年代，我国著名经济学家马寅初提出了“新人口论”。他指出，人口的增长速度不仅与现存的人口数有正相关关系，而且与人口的可增长空间成正相关关系。

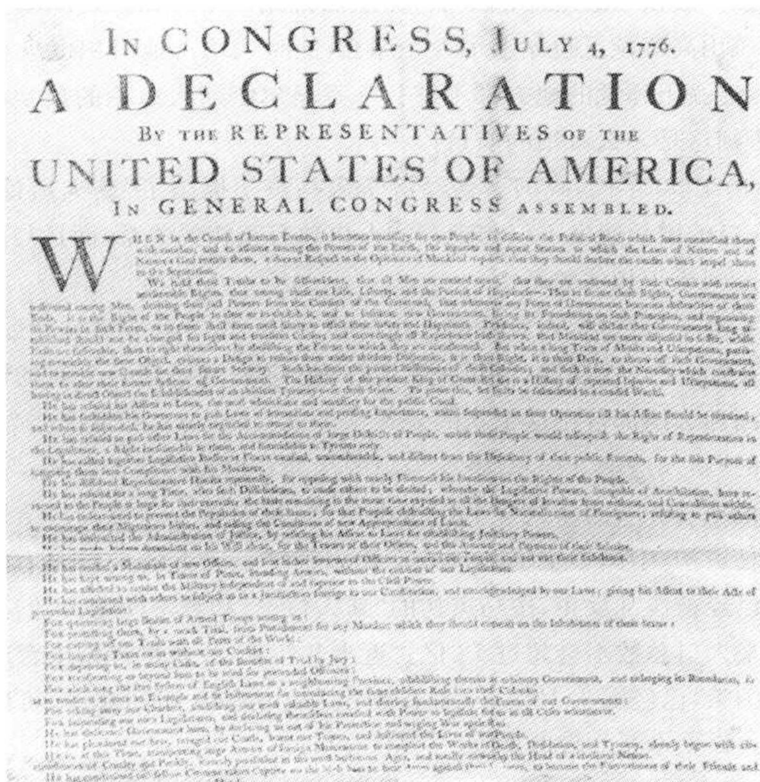
事实上也是这样，人口可增长空间越大（离人口满员情况越远）时人口增长越快，反之就越慢。把这些因素考虑进去就得到一个新的预报公式。美国和法国都曾用这个新的公式预报过人口，与实际情况相当吻合。马寅初的“新人口论”已经具备相当高的水准和重大的指导意义。只可惜他的理论在“极左”的年代里非但未被重视，反而被大肆批判。结果批斗了一个马寅初，中国多生了几亿人！我国承受了巨大的人口压力。幸好这一切已经被拨乱反正，按马寅初的“新人口论”和数学模型，人们算出了我国未来人口总数不会超过 18 亿。近十几年来，我国把计划生育政策作为基本国策，已经深入人心，再加上社会主义精神文明的建设，可以确信我国的人口安全是有保障的。

二、独立宣言



托马斯·杰斐逊
（1743—1826）

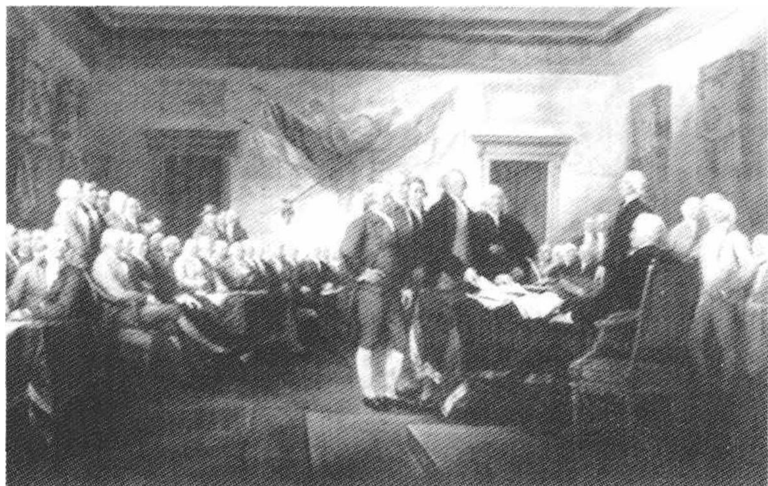
欧几里得的模式还推广到了政治学。美国的“独立宣言”是一个著名的例子。“独立宣言”是为了证明反抗大英帝国的完全合理性而撰写的。美国第三任总统杰斐逊（1743—1826）是这个宣言的主要起草人。他试图借助欧几里得的模型使人们对宣言的公正性和合理性深信不疑。“我们认为这些真理是不证自明的……”不仅所有的直角都相等，而且“所有的人生来都平等”。这些自明的真理包括，如果任何一届政府不服从这些先决条件，那么“人



IN CONGRESS, JULY 4, 1776.
A DECLARATION
BY THE REPRESENTATIVES OF THE
UNITED STATES OF AMERICA,
IN GENERAL CONGRESS ASSEMBLED.

独立宣言

民就有权更换或废除它”。宣言主要部分的开头讲:“英国国王乔治的政府没有满足上述条件。因此,……我们宣布,这些联合起来的殖民地是,而且按正当权力应该是,自由的和独立的国家。”这是一个典型的欧氏公设表述。“不证自明”是欧几里得“原本”中五个公设的基本特征。据记载,A. 林肯(1809—1865)认为,“人人生而平等”乃自由社会的第一公设。它很像现代宇宙学的第一公设——宇宙学原理:整个宇宙是没有中心的,处处是平权的。



签署“独立宣言”

“独立宣言”的“几何学”式表述,并不奇怪,起草“独立宣言”的杰斐逊一生酷爱欧几里得“原本”。杰斐逊受过良好教育,专业建筑师,自然懂得几何学。退休以后,“原本”仍是他最爱读的书之一。林肯早年并没有受过良好教育,“原本”是他后来自学的,当他成为国会议员后,仍用零星的时间钻研“原本”。他说,他的心灵靠三本书造就:“圣经”、“原本”和莎士比亚,“圣经”使他看到全能的上帝,“原本”令他发现理性的威力、莎士比亚则驱使他赞美和服务于善良的人。同时代的中国政治家曾国藩(1811—1872)也曾重视“原本”。曾国藩在洋务运动初期,1865 年,就支持刻印“原本”全本,并为之写序。他强调逻辑证明的重要性,主张“不能仅知演算,而不知其所以然”。后世崇尚林肯或曾国藩的政治家甚众,可

惜,极少提到他们崇尚的"原本"的理性威力。

三、选票分配问题



亚历山大·汉密尔顿

(1757—1804)

选票分配问题属于民主政治的范畴。选票分配是否合理是选民最关心的热点问题。这一问题早已引起西方政治家和数学家的关注,并进行了大量深入的研究。那么,选票分配的基本原则是什么呢?首先是公平合理,要做到公平合理,一个简单的办法是,选票按人数比例分配。但是会出现这样的问题:人数的比例常常不是整数。怎么办?一个简单的办法是四舍五入。四舍五入的结果可能会出现名额多余,或名额不足的情况。因为有这个缺点,美国乔治·华盛顿时代的财政部长亚历山大·汉密尔顿在1790年提出一个解决名额分配的办法,并于1792年为美国国会所通过。美国国会的议员是按州分配的。假定美国的人口数是p,各州的人口数分别是$p_1,p_2,\cdots,p_i$,再假定议员的总数是n,记$q_i=\frac{p_i}{p}\cdot n$,称它为第i个州分配的份额。汉密尔顿方法的具体操作如下:

(1)取各州份额q_i的整数部分$[q_i]$,让第i个州先拥有$[q_i]$个议员。

(2)然后考虑各个q_i的小数部分$\{q_i\}$,按从大到小的顺序将余下的名额分配给相应的州,直到名额分配完为止。

汉密尔顿方法看起来十分合理,但是仍存在问题。按照常规,假定各州的人口比例不变,议员名额的总数由于某种原因而增加的话,那么各州的议员名额数或者不变,或者增加,至少不应该减少。可是汉密尔顿方法却不能满足这一常规。1880年,亚拉巴马州曾面临这种状况。人们把汉密尔顿方法产生的这一矛盾叫作亚拉巴马悖论。汉密尔顿方法侵犯了亚拉巴马州的利益。其后,1890年、1900年人口普查后,缅因州和克罗拉多州也极力反对汉密尔顿方法。所以,从1880年起,美国国会就针对汉密尔顿方法的公正合理性展开了争论。因此,必须改进汉密尔顿方法,使之更加合理。新的方法不久就提出来了,并消除了亚拉巴马悖论。但是新

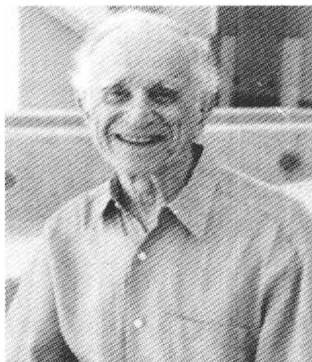
的方法引出新的问题，新的问题又需要消除。于是更新的方法，当然是更加公正合理的方法又出现了。人们当然会问，有没有一种一劳永逸的解决办法呢？

这个问题从诞生之日起，就一直吸引着众多政治家和数学家去研究。这里要特别提出的是巴林斯基和杨两位学者，他们在名额分配的研究中引进了公理化方法，并于 1982 年证明了一个令人吃惊的定理——不可能定理，即包括“不产生人口悖论”，“不违反公平分配原则”等在内的五条十分合理的公理不相容。换言之，满足这五条公理的名额分配方法是不存在的！这就是说，只有更合理，没有最合理。

四、伊斯顿——系统分析

西方政治学在 19 世纪末开始有较大的发展，但何时成为一门科学其说不一。模糊的国家、政府、民族概念一直是政治学的主要研究对象，但后来认为权力是中心概念，第二次世界大战后，政策研究占有突出的地位。

西方政治理论中主要用的是系统的方法及结构功能分析法。系统分析的代表人物是美国政治学家伊斯顿（D. Easton，1917 –）。



戴维·伊斯顿（1917–　）

伊斯顿被美国学术界公认为对政治科学的发展做出突出贡献的当代学者之一。他创立的政治系统分析模式被广泛应用于国内政治以及研究。他提倡重建新的价值结构，促进了公共政策研究的开展和政治理论的进一步丰富。把政治解释为围绕政府制定和执行政策而进行的活动，是一种实现“社会价值的权威性分配”的活动。他的理论是：

（1）把政治生活看成是一套行为系统。

（2）政治系统处于社会大环境中，它们分为内在的社会系统（包括生态系统、生物系统、人格系统及狭义社会系统）与外在的社会系统（包括国际政治系统、国际生态系统、国际社会系统等）。

(3)政治系统必定是开放的，有输入，有输出，有反馈，使自身正常工作，它的输入是环境和系统内对它的支持与需要，它对环境输出决策及行动。输出到输入有反馈，反映环境对政治系统的态度(如接受或反对)。

(4)政治系统对来自内外环境的压力有适应能力，它产生的反应是内部调整或消除压力，这样它可以持续，趋于稳定，否则将崩溃。

伊斯顿用这个模型对各种政治活动进行详尽分析。他的方法广泛应用于不同层次的系统，如国际、国内、地方、部门系统。但是系统分析的缺点是对突发的激烈变革无法解释，忽略了权利、控制、影响力等的分析。另外，如何与经验数据相配合也是一个问题。



阿尔蒙德(1911—)

结构功能分析的代表人物是阿尔蒙德(G. A. Almond，1911—)，他把伊斯顿的分析进一步精致化。他从政治体系的功能出发，把它分为三个层次，即系统层次(涉及体系的维持与适应功能)、过程层次(转换过程四个功能：利益表达、利益综合、政策制定、政策实施)及政治层次，考虑三个层次相互作用并进行比较分析。

五、帕森斯、默顿——系统及结构概念

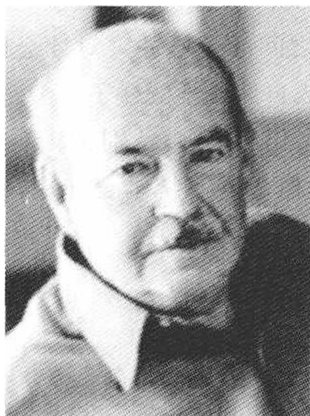
第二次世界大战前后最有影响的社会学派是结构-功能学派，其代表人物是帕森斯(T. Parsons，1902—1979)和默顿(R. Merton，1910—2003)，他们深受涂尔干及韦伯的影响，对建立理论社会学功绩甚大。所应有的数学也不是过去那种算的数学，而是结构理论以及其推广的系统理论。系统及结构概念的应用澄清了许多过去的糊涂观念，给社会学注入科学性，同时在社会的局部分析之外带来整体观念。帕森斯的目标是确定行为类型并对之进行完整的分类。他在《社会制度》(1905)一书中提出"模式变量"：

(1)规范：普遍性的或特殊性的；

(2)地位：自封的或被授予的；

(3)义务:特定的或散在的;

(4)情绪:不懂感情的或动感情的。



尔科特·帕森斯(1902—1979)
(Talcott Parsons)



伯特·金·默顿(1910—2003)
(Robert King Merton)

他的方案要点是,正如自然科学中的力、能一样,可以用普遍概念来探讨各种社会情况及社会类型。这只是第一步。第二步是仿照瓦尔拉建立普遍均衡理论一样,建立普遍的行为理论,由这个理论出发来分析所有社会行为。这样社会科学家就有可靠的分析方法来区分不同种类的行为,理解其复杂程度,并对表面上不同的社会现象加以适当的比较。这些实际上是古典力学的逻辑,科学家并不对具体事物进行探讨,而是抽象物体各个方面及各种性质以及它们之间的关系。

他研究出一个四维的文化系统,一个思维的社会系统,一个人格系统和一个有机行为系统,他的社会系统的四个功能是适应性功能,确定排列与实现目标的功能,把各部分统一成整体的一体化功能以及处理内部紧张状况维持模式运行功能,它们通常用 AGIL 来表示,由此来分析任何社会系统,即进行 AGIL 分析。默顿进一步完善这种方法,把它规范化并应用于实际问题的研究,在后来具体应用过程中也广泛使用社会统计方法,如在《美国士兵》中的研究。20 世纪 60 年代末结构功能主义衰落,原因有三:

(1)理论过于抽象,不易直接联系实际。

（2）偏于静止分析，而对社会变化及运动缺乏分析。用物理性术语讲，没有运动学及动力学。

（3）最重要的一点是社会科学常见的弊端，忽视人的因素：人的认识、人的控制以及人与人之间、集团与集团之间的矛盾冲突对社会比对自然的影响要大得多，社会科学不能完全搞成自然科学的样子。

尽管如此，从系统论角度来研究社会仍然很多，特别是从维纳控制论思想引入结构-功能主义理论，把信息的概念同系统结合起来，构成了一个新的方向。

第二节　数学与战争

自从有了人类社会以来，战争一直连绵不断。在5000年漫长的历史进程中，战争冲突是远比和平共处更为常见的现象。战争从来没有在人类社会中长时间地停息过。正如福尔斯（Cyrit Falls）所说："战争曾深刻地影响人类的历史。"不管出于什么原因打起仗来，战争在改变社会面貌方面的作用要比经济、政治、社会、文化等方面的因素更为显著。近代社会由于长期处于不是热战就是备战的状态，战争和国防在社会生活中受到极大的关注。随着科学技术在战争中的作用的增长，自然战争也相当大地推动科学计数的进步，这种推动力量远远比生产及社会因素大。反过来，科学技术在战争中所起的作用越来越具有决定性意义。

一、战争中的数学

现代战争不仅是综合国力的体现，也是科学技术的集中体现，这其中少不了数学这个重要角色的参与。不要说各种武器中的数学运用，也不用说弹道和测量方面的数学运用，单就指挥决策，也少不了数学。

1991年的海湾战争是战争史上一次划时代的战争，它不仅标志着刺刀手榴弹的时代已经彻底过去，也体现了一种在高科技情况下的前所未有的战争模式。众多大型武器间超远距离协同，没有现代的数字化信息

技术是不可能实现的。当 DSP 卫星发现目标后，向澳大利亚地面站发送警报，又经美国本土的夏延山指挥所把信息发给利雅得指挥中心，然后命令“爱国者”导弹操作员进入战位。这在半个地球上所发生的事情几乎瞬间完成，而这些都离不开数学的运用。

这次战争中伊拉克方发出威胁，要点燃科威特全部油井。这个后果是严重的：遮天蔽日的烟尘会使气温急剧下降，弄不好会造成全球性气候的改变，造成严重的经济后果，严重威胁生态平衡。为了顾及这个后果，美方委托一家公司研究这个问题。该公司结合流体爆炸后巴格尔上空的情况，建立了力学方程及热量传递方程，利用数学模型，经过计算机仿真，得出结论：后果虽然是严重的，但也仅限于海湾地区、伊朗南部、印度和巴基斯坦北部，不会产生全球性后果。这个结论帮助美军下定了决心。

所以，海湾战争在某种程度上说是一场数学战争。

从这个例子我们可以看出，通过数学手段有时会对对抗的结果进行分析和预测，这可以为指挥人员提供参考，帮助他们下决心。至于飞机投弹命中率、大炮弹着落点、鱼雷发射角度等作战中的问题对数学的运用更不用提了。

有意思的是战争与我们前面所说的黄金数也颇有关系。请看下边几个例子：

(1)古代马其顿帝国与波斯帝国的阿贝拉之战。马其顿帝国的亚历山大，把他的攻击点选在了波斯军队的左翼和中央的结合部，结果大获全胜，而这个部位恰好处于整个战线的黄金点上。

(2)战史学家们曾惊奇地发现，在 1942 年 6 月开始的苏联卫国战争中，战场的转折点——斯大林格勒战役正好发生在战争爆发后的第 17 个月，而这正是德军由盛转衰的 26 个月时间轴上的黄金点。

(3)1991 年的海湾战争中，美军在发动地面进攻之前，摧毁了伊拉克军队 4280 辆坦克中的 38%，2280 辆装甲车中的 32%，3100 门大炮的 47%，使伊军总战斗力下降至 60%，这正是军队丧失战斗力的临界点，也接近 0.618。

当然以上例子可能都是巧合，不过 0.618 这个黄金数的确是挺神奇的。

二、数学与弹道学



塔塔利亚(1500—1557)

数学对武器的制造及改进有着很大的作用，在枪炮发展后，弹道学的研究为枪炮改进提供了理论依据。从 16 世纪起，许多数学家是弹道学家，以解三次、四次方程而著名的塔塔利亚(N. Tartaglia，1500—1557)是弹道学创始者之一，他曾写了两篇炮术论文，想根据动力学理论推导出算表来计算火炮距离，但他缺乏军事经验和火炮的技术知识，基本理论有误。他的有用贡献是发明射手象仪器，这是测量火炮仰角的仪器。一个世纪之后，伽利略才纠正了塔塔利亚的错误。伽利略把火炮作为验证他的数学理论的最好方法，从研究中发现了抛物线理论(1638)。但伽利略忽视了空气阻力的作用，牛顿考虑空气阻力，从而求得炮弹弹道。不过，炮膛粗糙不平，炮弹与炮膛不配合，炮手实际操作中顾不上理论。另外，火器制造不同，飞行弹道误差很大。一直到 18 世纪英国数学家罗宾斯(B. Robins，1707—1751)著《炮术新原理》(1742)才为火炮弹道学奠定了科学基础。他不仅研究外弹道学，还研究内弹道学、终端弹道学，他还改善了卡西尼(G. D. Cassini，1625—1712)发明的弹道摆，成为测量弹丸初速的有效仪器。在考虑空气阻力时，问题化为微分方程组问题，发现炮弹射程 l，最大高度 h 以及飞行时间 T 都明显依靠于炮弹的初速度 v_0，初速度越大(特别超过 50 米/秒以后)，偏差越大。但是不考虑空气阻力时，h 与 T 之间有简单关系：$h=\frac{1}{8}gT^2$。这个关系在有空气阻力时，仍然相当准确，因而广泛应用于弹道学。



弹道学运用

到 19 世纪，武器制造由

于冶金及机械的发展而更加精密，使得科学弹道学为武器的改进提供科学分析的基础。特别是滑膛枪过渡到有来福线的枪炮，射程及准确度大大增加，肉眼目测已不可行，需要瞄准装置，同时需要更精确的数学模型。数学家库默尔(E. Kummer，1810—1893)、切贝舍夫、李特尔伍德等都研究过弹道学。



库默尔(1810—1893)

到第一次世界大战乃至第二次世界大战时，计算射击火力表一直是数学家的主要任务，对于固定规格的炮弹，在一定的仰角下，计算射程、高度及飞行时间。虽然制造炮弹的精准度有很大提高，但重量、火药量有微小差别，射击时仰角也不可能完全一样，从而炮弹初速及落点服从一种概率分布。正是由于第二次世界大战中计算火力表的任务极端繁重，刺激了电子计算机的研制工作，最终导致第一台电子计算机的诞生。

三、数学与密码破译

数学在战争中发挥重大作用的另一重要领域是密码破译、密码加密。

“知己知彼，百战不殆”，在实战中了解敌方的作战计划是战胜敌人的钥匙。从古埃及法老时代就已经开始通信侦察工作，从马拉松到滑铁卢的世界历史上 15 次大决战中，只有一次战役是依靠通信侦察而最终获胜的。公元前 207 年，迦太基统帅汉尼拔给他的弟弟的信落在了罗马人手中，使这位几乎打败了罗马人的英雄最终失败。从那时起直到 20 世纪，很少是由通信侦察打赢战争的。

20 世纪初，随着无线电通讯的应用，大大改变了各部队之间的联系状况，过去用有线通讯无法联系的舰艇及飞机之类的战斗单位也可以及时互相联系，成为指挥协同作战的有效工具。但是由于无线电波是自由传播的，敌方也比较容易截收，所以密码术和破译术成为通讯保密的基础。实际上，在第一次世界大战之前，法国、奥匈帝国和俄国都已建立密码破译机构，当时主要是想破译外交密码。只有在第一次世界大战打起

来，德国才开始建立无线电侦察机。当时德国两面作战，腹背受敌，开始时，俄国已侵入东普鲁士，德皇派兴登堡（P. von Hindenburg，1847 1934）及鲁登道夫（E. Ludendorff，1865 1937）指挥东线，他们面对着多一两倍的敌人。鲁登道夫说："北方的俄国集团军有'黑云压城城欲摧'之势，只要它从东北方向压过来，我们就会溃不成军。"但由于截获俄国电报，德国人根据这些情报几乎像演习一样在坦能堡包围和歼灭了俄国军队。坦能堡战役是俄国人走向失败和引起国内革命的第一步。这是历史上由无线电侦察而取得第一次军事胜利。以后，俄国人把他们电报加密，但德、奥的密码破译机构一个接一个地破译，使他们在东线屡战屡胜。总之，密码被破译是俄国人军事失败的决定性原因。在南线，奥地利人破译了意军的最难破和最保密的密码，从而在卡普莱托血战中获胜。

在西线情形倒过来，法国人破译了德军密码，处决了玛塔·哈里（Mata Hari，原名 G. M. Zelle，1876—1917，国籍不明的舞女，关于她是否是德国间谍，史学界一直存在争论），特别是 1918 年法国破译了更多德军电报，使协约国有效地制止了德国 1918 年的攻势，最后使德国彻底失败。德国失败的转折点是因为美国的参战，美国的参战打破了"西线无战事"的僵局，而使美国参战的直接原因则是英国破译人员破译了著名的齐默尔曼（A. Zimmermann，1864—1940）的电报。实际上，德国实行无限制潜艇战，1915 年 5 月击沉卢西塔尼亚号，使百余美国平民丧生而引起美国人抗击，美国人当时并没有参战，但对协约国的供应却日益加强，德国要将所有供应舰船击沉，势必得罪美国，最终会导致美国对德宣战。为此，当时德国外交部长齐默尔曼以帮助墨西哥收复 1846 年被美国夺去的从德克萨斯到太平洋北岸大片领土（占当时墨领土近 50%）为诱饵，要求墨西哥对美宣战，好把美国拴在美洲。这个绝密被英国破译后，美国朝野震惊，连因"他使我们避免战争"标榜孤立主义重新当选的威尔逊总统（W. Wilson，1865—1924，美 28 届总统，任期 1913—1921 年）也不得不请求国会支持美国对德国宣战。美国的参战打破了西线的僵局，为协约国胜利做出了贡献。从此美国开始更深地卷入欧洲乃至世界的事务上，走上一个超级大国之路。

第二次世界大战中有许多战役更是因密码破译而取得决定性胜利，

而不能破译一方就只能一筹莫展。这方面的例子很多：1941 年底到 1942 年初，德国破译人员破译了美国驻开罗使馆武官的密码，而得知英军的计划，使德国在北非的指挥官"沙漠之狐"隆美尔（E. Rommel，1891—1944）迫使英国人后退 300 英里，德国人几乎推进到亚历山大。希特勒曾希望"但愿美国驻开罗大使能继续用其糟糕的加密电报向我们报告英国的军事计划"。不过事与愿违，美国人更换了密码，德国人再也破译不了了，统帅部摸不清英军的动向，蒙哥马利（B. L. Montgomery，1887—1976）用"明修栈道、暗渡陈仓"的办法，最终在 1943 年把德军赶出北非。

在东线及海上，德军的通信侦察工作也是最重要的情报来源，在战争初期和中期，德国海军破译密码机关破译了英国皇家海军及商船队的密码，德国潜艇经常事先得知英国舰船航线而把它们击沉。但后期德国密码机构对盟国的密码越来越没有办法。

在盟国方面，图灵（A. Turing，1912—1954）等破译德军密码，以及美军破译日军密码，在中途岛海战大胜日军和后来击落日本海军主将山本五十六座机，更是众所周知的在战争中起主要作用的事件。



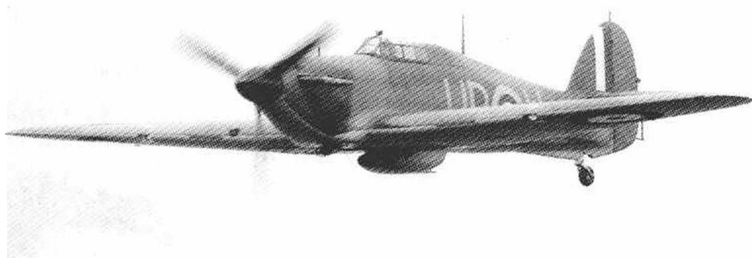
图灵（1912—1954）

数学在战争中的作用当然远不止这两方面，不过由此可见一斑。

四、数学与飞机损失率

第二次世界大战时期，当德国对法国等几个国家发动攻势时，英国首相丘吉尔应法国的请求，动用了十几个防空中队的飞机和德国作战。这些飞机中队必须由大陆上的机场来维护和操作。空战中英机损失惨重。与此同时，法国总理要求继续增派 10 个中队的飞机。丘吉尔决定同意这一请求。内阁知道此事后，找来数学家进行分析预测，并根据出动飞机与战损飞机的统计数据建立了回归预测模型。经过快速研究发现，如果补充率、损失率不变，飞机数量的下降是非常快的，用一句话概括就是"以现在的损失率损失两周，英国在法国的'飓风'式战斗机便一架也不存在

了”，要求内阁否决这一决定。最后，丘吉尔同意了这一要求，并将除留在法国的 3 个中队外，其余飞机全部返回英国，为下一步的英伦保卫战保留了实力。



“飓风”式战斗机

五、巧妙对付日机轰炸

第二次世界大战太平洋战争初期，美军舰船屡遭日机攻击，损失率高达 62%。美军急调大批数学家对 477 个战例进行量化分析，得出两个结论：一是当日军飞机采取高空俯冲轰炸时，美舰船采取急速摆动规避战术的损失率为 20%，采取缓慢摆动的损失率为 100%；二是当日军飞机采取低空俯冲轰炸时，美军舰船采取急速摆动和缓慢摆动的损失率平均为 57%。美军根据对策论的最大最小化原理，从中找到了最佳方法：当敌机来袭时，采取急速摆动规避战术。据估算这一决策使美国舰船损失率从 62%下降到 27%。

六、准确估计日舰开进路线

第二次世界大战新几内亚作战期间，美军得到了日军将从新不列颠岛东岸的腊包尔港派出大型护航舰队驶往新几内亚莱城的情报。日军舰队可能走两条航线，航程都是两天，其中北面航线云多雾大，能见度差不

便于观察；南面航线能见度好便于观察。美军也有两种行动方案可供选择，即分别在南北航线上集中航空兵主力进行侦察、轰炸。若日军选择走北线，美军也选择北线，最多只能有两天的轰炸时间，甚至可能由于天气影响，根本没有轰炸时间；若日军选择走北线，美军选择南线，则由于在南线侦察耽搁一天，最多只能有一天的轰炸时间，甚至可能由于天气影响，根本没有轰炸时间。而若日军选择走南线，美军选择北线，由于在北线侦察耽搁一天，可有一天的轰炸时间；若日军选择走南线，美军也选择南线，则可有两天的轰炸时间。因此，日军选择走北线，被轰炸天数为 0～3 天；日军选择走南线，则被轰炸天数为 3 天。美军由此断定日军必走北线。真实情况果真如此，日军舰队损失惨重。

七、理智避开德军潜艇

1943 年以前，在大西洋上航行的英美运输船队常常受到德国潜艇的袭击。当时，英美两国实力受限，又无力增派更多的护航舰艇。一时间，德军的“潜艇战”搞得盟军焦头烂额。为此，一位美国海军将领专门去请教了几位数学家。数学家们运用概率论分析后发现，舰队与敌潜艇相遇是一个随机事件。从数学角度来看这一问题，它具有一定的规律：一定数量的船编队规模越小，编次就越多；编次越多，与敌人相遇的概率就越大。美国海军接受了数学家的建议，命令舰队在指定海域集合，再集体通过危险海域，然后各自驶向预定港口，结果盟军舰队遭袭被击沉的概率由原来的 25％下降为 1％，大大减少了损失。

八、算准深水炸弹的爆炸深度

第二次世界大战期间，英美运输船队在大西洋航行时经常受到德军潜艇的袭击。英国空军经常派出轰炸机利用深水炸弹对德军潜艇实施打击，但轰炸效果总不理想。为此，英军请来一些数学家专门研究这一问题。结果发现，潜艇从发现英军飞机开始下潜到深水炸弹爆炸为止，只下潜了 7.6 米，而英军飞机的深水炸弹却已下沉到 21 米处爆炸，从而对潜艇的毁伤效果低下。经过科学论证，英军果断调整了深水炸弹的引信，爆炸深度由 21 米调整到 9.1 米，结果轰炸效果提高了 4 倍，德军还以为英

军有了什么新式武器。

九、战舰与浪齐高

1942年10月，巴顿将军率领4万多美军，乘100艘战舰，直奔距离美国4000千米的摩洛哥，在11月8日凌晨登陆。11月4日，海面上突然刮起西北大风，惊涛骇浪使舰艇倾斜达42°。直到11月6日天气仍无好转。华盛顿总部担心舰队会因大风而全军覆没，电令巴顿的舰队改在地中海沿岸的任何其他港口登陆。巴顿回电：不管天气如何，我将按原计划行动。

11月7日午夜，海面突然风平浪静，巴顿军团按计划成功登陆。事后人们说这是侥幸取胜，这位“血胆将军”拿将士的生命做赌注。其实，巴顿将军在出发前就和气象学家详细研究了摩洛哥海域风浪变化的规律和相关参数，知道11月4日至7日该海域虽然有大风，但根据该海域往常最大浪高波长和舰艇的比例关系，恰恰达不到翻船的程度，不会对整个舰队造成危害。相反，11月8日却是一个有利于登陆的好天气。巴顿正是利用科学预测和可靠参数，抓住“可怕的机会”，突然出现在敌人面前。

第三节　数学与经济

经济学研究生产、需求、消费、交换、流通、竞争、合作利润等，这些方面都以量的形式表现出来，对这些量进行深入讨论，势必需要数学的加入。数学与经济的结合可分为三个时期：从17世纪90年代到19世纪20年代是萌芽时期，这一时期将数学与经济相结合为代表的是英国古典经济学家威廉·配第在他所著的《政治算术》中首次把数学方法引进经济学研究，法国重农主义的主要代表人物魁奈在其《经济表》中，通过锯齿形运用算术级数来反映国民生产总值的生产、流通和分配。这一时期主要采用初等数学的方法对经济学进行定性的分析。从19世纪20年代到20世纪40年代是形成时期，这一时期将数学与经济学结合的代表是法国经

济学家古诺在 1838 年发表的《财富理论的数学原理研究》，是第一部用微积分来研究经济问题的著作。美国经济学家萨缪尔森在 1947 年出版的《经济分析基础》中以有约束的最大化作为一般原则对生产者行为、消费者行为、国际贸易、公共财政等方面从体系有解、函数可导、偏导数矩阵可逆的假定出发，由逆函数定理推导出体系隐含均衡条件的局部唯一解。从 20 世纪 40 年代开始一直到现在是全面发展时期，在这一时期，数学建模将数学与经济学进行有效的结合。

一、从诺贝尔经济学奖看数学在经济学中的应用

诺贝尔奖 1901 年设立之初，只有物理学、化学、生理学或医学、文学与和平五个奖项，直到 1969 年才设立了诺贝尔经济学奖。虽然一直没有诺贝尔数学奖，但数学与诺贝尔经济学奖的联系却十分紧密，1969 年首届诺贝尔经济学奖授予将数学与统计方法应用于经济分析的荷兰经济学家简・丁伯根(Jan Tinbergen)和雷格纳尔・弗里希(Ragnar Frish)，自此，在全球经济学研究中出现了经济学数学化的趋势。

有人将这一经济学奖称为经济学奖中的数学奖，因为经济学家中的数学家得此奖的频率最高。从 1969 年到 2010 年的 42 年中，大部分诺贝尔经济学奖的获奖者都运用数学方法来研究经济理论，且获奖者很多有数学专业学习的背景，有深厚的数学功底。获奖者中真正的大数学家有苏联经济学家列奥尼德・康托罗维奇(Leonid V. Kantorovich)和美国经济学家小约翰・福布斯・纳什(John Forbes Nash Jr)，完全因为数学得奖的有罗拉尔・德布鲁(Gerard Debreu)、纳什、莱因哈德・泽尔腾(Reinhard Selton)和约翰・哈萨尼(John Harsanyi)等人。而有数学专业学习背景的获奖者更多，如雷格纳尔・弗里希，1971 年诺贝尔经济学奖获得者西蒙・库兹涅茨(Simon Kuznets)，2010 年诺贝尔经济学奖获得者彼得・戴蒙德(Peter Diamond)等等。虽然数学分析方法不是经济学研究的唯一方法，但不可置否的是现代经济学越来越多地将数学(包括统计学)作为分析工具，数学也不负使命地使经济学走向一个又一个的殿堂。

从诺贝尔经济学奖看数学在经济学中的应用，主要有两方面：一是计量经济学，二是数理经济学方法(即公理化)。

1. 计量经济学

"计量经济学"一词，是挪威经济学家弗里希在 1926 年仿照"生物计量学"一词提出来的。弗里希认为，统计学、经济理论和数学这三者对于真正了解现代经济生活中的数量关系来说，都是必要的，但各自并非是充分条件，而三者结合起来，就有力量，这种结合便构成了计量经济学。弗里希首次应用计量经济学方法分析资本主义周期性经济波动，在 1933 年，提出了经济宏观模型①：

$$\begin{cases} \dot{x}=c-\lambda(rx+sz) \\ y=mx+\mu\dot{x} \\ \varepsilon\dot{z}_t=y_t-y_{t-\varepsilon} \end{cases}$$

上式中 y 是资本产品的(总)产出，x 是总消费(国民收入)，z 是资本持有活动(总投资)，其他为常数。第一个方程表示消费增长速度随当前消费和投资的增加而减少，第二个方程表示产出与消费量和消费速度成正比，第三个方程表示投资与一段时期的经济增长成正比。



雷格纳尔·弗里希(1895—1973)



简·丁伯根(1903—1994)

1969 年的首届诺贝尔经济学奖由弗里希和荷兰经济学学家丁伯根共同获得，他们对经济理论赋予数学上的严谨性，使它具有允许经验定量和统计假设检验的形式，使经济学摆脱模糊的类型。他们发展了用动态模型来分析经济进程，被誉为计量经济学的奠基者。

① 史树中. 诺贝尔经济学奖与数学[M]. 北京：清华大学出版社，2002：19

1980 年诺贝尔经济学奖授予因创立经济模型，并将其应用于经济波动和经济政策分析的劳伦斯·R. 克莱因（Lawrence R. Klein）。他是著名的计量经济学家，复兴了弗里希在 20 世纪 30 年代开始的宏观经济计量分析。克莱因建立了含有几十万个变量的方程，研究经济波动和政策的适应性，其中最著名的是他与阿瑟·戈德伯格（Arthur Goldberger）合作完成的美国经济模型：克莱因-戈德伯格模型（Klein-Goldberger model），这种大型计量模型的建立对计量经济学的实际应用产生了巨大影响。

1989 年诺贝尔经济学奖授予挪威著名计量经济学家特里夫·哈维尔莫（Trygve Haavel-mo），他是计量经济学概率论基础的开创者，澄清了计量经济学的概率论基础以及联立经济结构分析。



劳伦斯·R. 克莱因

20 世纪 30 年代出现的运用经验数据检验经济理论的尝试引起人们对两类基本经济问题的关注：①经济关系往往涉及两个人或企业统计数据如何处理的问题；②经济学家几乎不能或者永远无法做出像自然科学家所做出的那种可控制的实验。哈维尔莫研究表明，只要运用概率论系统地表述经济理论，上述两个基本的问题就可以迎刃而解。他用“随机样本”的经验观测中取得有关潜在关系的严密结论表明了数理统计方法为何能被应用于经济理论的估计、检验及经济预测[①]。

2000 年诺贝尔经济学奖授予从事微观计量经济学的美国经济学家詹姆斯·赫克曼（James Heckman）和丹尼尔·麦克法登（Daniel McFad-den），奖励赫克曼对分析选择性样本的理论和方法的发展，奖励麦克法登对分析离散选择理论和方法的发展。他们发展了广泛应用于经济学中进行统计分析的理论和方法，尤其是针对统计数据选择偏差的纠正的理论和方法。

① http://www.seba.bnu.edu.cntjljzlspage89.htm



詹姆斯·赫克曼(1944－　)



丹尼尔·麦克法登(1937－　)

这些诺贝尔经济学奖获得者给出的计量经济模型无论是在微观经济分析还是在宏观经济方面的应用,都对世界经济的研究起到了非常巨大的作用。同时这些计量经济模型也在承受着世界经济变化带来的挑战。

2. 数理经济学

数理经济学是运用数学方法对经济学理论进行陈述和研究的一个分支学科。数理经济学方法也称为公理化方法,是从经济现象中提炼出一些假设,并从这些假设出发,应用抽象的数学推理,得出反映经济现象的数学模型。法国经济学家里昂·瓦尔拉斯(Léon Walras)是数理经济学影响最大的创始人,他在经济学中使用了数学,研究了使一切市场都处于供求相等状态的均衡,开创了一般经济均衡理论,并建立了相应的数学模型,他的一般均衡分析方法被西方经济学所普遍使用,而一般均衡理论也是经济学中较为典型的公理化方法。



里昂·瓦尔拉斯
(1834－1910)

1972年美国经济学家肯尼斯·约瑟夫·阿罗(Kenneth J. Arrow)由于在一般经济均衡理论和福利理论中作出的先驱性贡献获得诺贝尔经济学奖。阿罗和罗拉尔·德布鲁(Gerard Debreu)(1983年诺贝尔经济学奖得主)运用Brouwer-Kakutani不动点定理严格证

明了均衡存在性，弥补了一般经济均衡理论基础存在的缺陷，从而一般经济理论真正开始成为严格完整的公理化体系。阿罗以一般均衡论作为分析方法研究福利经济学中最适宜的资源配置问题。在福利经济学方面他的重要贡献是提出了“不可能性定理”，按照这个定理，在个人偏好函数范围以外不可能编制社会福利函数，即满足公理系统的公共选择，或社会福利函数是不存在的。这个定理被认为是继冯·诺依曼和摩根斯坦的对策论（博弈论）研究后以及 Arrow-Debreu 一般经济均衡存在性定理之前，经济学中最为出色的数学公理化方法的运用。



肯尼斯·约瑟夫·阿罗（1921—　）



罗拉尔·德布鲁（1927—2004）

二、数学与股市预测

现代人对股票几乎都不陌生。炒股已成为当今社会最热门的投资手段之一，岂不知这里面也有数学学问。

我们先说说“黄金分割”理论在股票投资上的应用。

有一条线段 AB，在它上面取一点 C，使 AC 与 AB 的长度比为 0.618，则 C 点被称为 AB 线段的黄金点，0.618 这个数被称为黄金率，把线段的这种分割称为黄金分割。

黄金率是股市中常用于测定阻力位和支撑位的一组神奇数字，最基本的黄金率是 0.618 和 0.382，股市中还常用到 0.618 和 0.382 相关或引申而来的其他神奇数字，如 0.191、0.382、0.5、0.618、0.809，1，1.618，2，2.618。

在股价预测中，使用黄金率有两种分析方法。

第一种方法，以股价近期走势中重要峰位或底位，也就是高价或低价为计算基础，当股价运行到某个黄金点时可能会有波动。当行情接近尾声，股价发生急升或急跌后，某涨跌达到某一个黄金比时，则可能发生转势。

第二种方法是，行情发生转势以后，无论是止升转跌还是止跌转升的反转，都以近期走势中重要的峰位和底位之间的差额作为计算基数。在研究股市中，常用上述黄金分割率来推测股价的阻力位和支撑位，阻力位则是指在股价上升时可能遇到压力，从而反转下跌的价位，相对应的支撑位是指在股价下跌时可能遇到支撑，从而止跌回稳的价位。当股价为 P，各股从 P 上涨时，它的阻力位是 $P(1+x)$，x 代表上述某一个黄金分割率，而 $P(1-x)$ 是指股价下跌时遇到的支撑位，x 也是上述黄金分割率之一。

例如，如图 7-1 所示，当某一个股从 20 元开始下跌，那么它下跌的第一个支撑位是：

$$20\text{ 元}\times(1-0.191)=16.18\text{ 元};$$

假如它再一次跌破 16.18 元，那么它下一个支撑位是：

$$20\text{ 元}\times(1-0.382)=12.36\text{ 元};$$

假如这一个股跌到 12 元，止跌为升，那么它的第一个反弹的阻力位是：

$$12\text{ 元}\times(1+0.191)=14.292\text{ 元};$$

假如突破了 14.292 元，那么它下一个阻力位是：

$$12\text{ 元}\times(1+0.382)=16.584\text{ 元}。$$

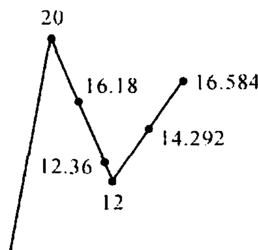


图 7-1

以上那些点只是通过技术分析得出行情可能发生临时反转的点，技术分析只是一种工具，而不是万试万灵的。在技术分析过程中，往往受各种主客观因素的影响而产生偏差，具体操作还得结合现场情况。

由艾略特创造的金融投资中的波浪理论，实际上是套用了上面所说的黄金分割理论，并将其发扬

光大，他认为股市按一定的规律循环交替进行，即五次上升、三次下跌的循环，在这上升下跌的波浪中，蕴含着许多黄金分割率。上述的黄金分割理论在期货、汇市的交易中也适用。

数学在股市投资中应用的另一个典型例子就是“对称”。

“股市无处不对称”这句话一点也不夸张。仔细审视股票走势图像就可以相信这一点。小对称，小转向，大对称，大转向，每一次市场的转向，几乎都发生在对称点上。股市中，无论是空间形态亦或是时间周期，都无一例外地呈现对称性，现在仅就股票、期货探讨一下这个问题。

时间的对称性一般可以有三种类型：

（1）以历史某一个重要时刻的顶部或底部所在位置作横轴的一条垂直线，这条垂直线就是对称轴。轴两边相对应的高低点往往与该轴相距的时间相等。依此方法可以根据轴左边历史走势的高低点距轴的距离，确定未来走势可能出现的相应高低点与对称轴的距离，从而找出它们出现的时间。

（2）以一个顶部和底部（顶部在前的情况），或以一个底部和顶部（底部在前的情况），分别作对称轴。这时第二条轴后面的走势（未来走势）往往恰似两条对称轴所夹部分的历史走势的翻版。这样，可以在两条对称轴之间某点距第一条（左边）对称轴的距离为长度，在第二对称轴（右边）的右边量出相同的距离，就确定了未来该高度出现的时间。

（3）以两个顶部或两个底部分别作对称轴，其余做法与第二种情况相似。这样，第二条对称轴之后的走势，往往是两条对称轴之间走势的翻版。

三、博弈论改写经济学

博弈论（Game Theory），有时也称为对策论，或者赛局理论，是研究具有斗争或竞争性质现象的理论和方法，它是应用数学的一个分支，既是现代数学的一个新分支，也是运筹学的一个重要学科。

博弈论主要是由冯·诺依曼（1903—1957）创立的，他是一位出生于匈牙利的天才数学家，不仅创立了经济博弈论，而且提出了计算机的基本原理。早在20世纪初，塞梅鲁（Zermelo）、鲍罗（Borel）和冯·诺伊曼已

经开始研究博弈的准确的数学表达，直到 1939 年，冯・诺依曼遇到经济学家奥斯卡・摩根斯特恩（Oskar Morgenstern），并与其合作才使博弈论进入经济学的广阔领域。1944 年他与奥斯卡・摩根斯特恩合著的巨作《博弈论与经济行为》出版，标志着现代系统博弈理论的初步形成。尽管对具有博弈性质的问题的研究可以追溯到 19 世纪甚至更早，例如，1838 年古诺（Cournot）简单双寡头垄断博弈；1883 年伯特兰和 1925 年艾奇沃奇思研究了两个寡头的产量与价格垄断；2000 多年前中国著名军事家孙武的后代孙膑利用博弈论方法帮助田忌赛马取胜等等都属于早期博弈论的萌芽，其特点是零星的、片断的研究，带有很大的偶然性，很不系统。冯・诺依曼和摩根斯特恩的《博弈论与经济行为》一书中提出的标准型、扩展型和合作型博弈模型解的概念和分析方法，奠定了这门学科的理论基础。合作型博弈在 20 世纪 50 年代达到了巅峰期。然而，冯・诺依曼的博弈论的局限性也日益暴露出来，由于它过于抽象，使应用范围受到很大限制，在很长时间里，人们对博弈论的研究知之甚少，只是少数数学家的专利，所以影响力很有限。



冯・诺依曼（1903—1957）



奥斯卡・摩根斯特恩（1902—1977）

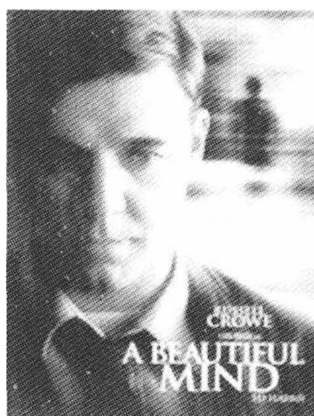
在冯・诺伊曼和摩根斯特恩的贡献的基础之上，约翰・纳什于 1951 年引入了合作博弈和非合作博弈的区分，并为非合作博弈提出了被后人命名为“纳什均衡”的一般性解概念，从而为博弈论奠定了基础。

小约翰·福布斯·纳什(John Forbes Nash Jr)生于1928年6月13日。纳什小时候孤独内向,他的数学天分大约在14岁开始展现。他在普林斯顿大学读博士时刚刚20岁出头,但他的一篇关于非合作博弈的博士论文和其他相关文章,确立了他博弈论大师的地位。在20世纪50年代末,他已是闻名世界的科学家了。



小约翰·福布斯·纳什
(1928—)

然而,正当他的事业如日中天的时候,30岁的纳什得了严重的精神分裂症。他的妻子艾利西亚——麻省理工学院物理系毕业生,表现出钢铁一般的意志:她挺过了丈夫被禁闭治疗、孤立无援的日子,走过了唯一儿子同样罹患精神分裂症的震惊与哀伤……漫长的半个世纪之后,她的耐心和毅力终于创下了了不起的奇迹:纳什渐渐康复,并在1994年因为在博弈论上的成就获得诺贝尔经济学奖。奥斯卡获奖影片《美丽心灵》正是一部以纳什的生平经历为基础而创作的人物传记片。



影片《美丽心灵》

1950年和1951年纳什的两篇关于非合作博弈论的重要论文,彻底改变了人们对竞争和市场的看法。他证明了非合作博弈及其均衡解,并证明了均衡解的存在性,即著名的纳什均衡,从而揭示了博弈均衡与经济均衡的内在联系。纳什的研究奠定了现代非合作博弈论的基石,后来的博弈论研究基本上都沿着这条主线展开的。然而,纳什天才的发现却遭到冯·诺依曼的断然否定,在此之前他还受到爱因斯坦的冷遇。但是骨子里挑战权威、藐视权威的本性,使纳什坚持了自己的观点,终成一代大师。要不是30多年的严重精神病折磨,恐怕他早已站在诺贝尔奖的领奖台上了,而且也绝不会与其他人分享这一殊荣。

纳什是一个天才的数学家,他的主要贡献是1950—1951年在普林斯

顿大学读博士学位时做出的。然而，他的天才发现——非合作博弈的均衡，即“纳什均衡”并不是一帆风顺的。1948 年纳什到普林斯顿大学读数学系的博士，那一年他还不到 20 岁。当时普林斯顿大学可谓人杰地灵，大师如云，爱因斯坦、冯·诺依曼、列夫谢茨（数学系主任）、阿尔伯特·塔克、阿伦佐·切奇、哈罗德·库恩、诺尔曼·斯蒂恩罗德、埃尔夫·福克斯……全都在这里。

正是在这个时候，非合作博弈——“纳什均衡”应运而生了，它标志着博弈论的新时代的开始！纳什不是一个按部就班的学生，他经常旷课。据他的同学们回忆，他们根本想不起来曾经什么时候和纳什一起完完整整地上过一门必修课，但纳什争辩说，至少上过斯蒂恩罗德的代数拓扑学。斯蒂恩罗德恰恰是这门学科的创立者，可是，没上几次课，纳什就认定这门课不符合他的口味，于是，又走人了。然而，纳什毕竟是一位非凡人物，他广泛涉猎数学王国的每一个分支，如拓扑学、代数几何学、逻辑学、博弈论等等，深深地为之着迷。纳什经常显示出他与众不同的自信和自负，充满咄咄逼人的学术野心。1950 年整个夏天纳什都忙于应付紧张的考试，他的博弈论研究工作被迫中断，他感到这是莫大的浪费。殊不知这种暂时的“放弃”，使原来模糊、杂乱和无绪的若干念头，在潜意识的持续思考下，逐步形成一条清晰的脉络，突然来了灵感！这一年的 10 月，他骤感才思潮涌，梦笔生花，其中一个最耀眼的亮点就是日后被称为“纳什均衡”的非合作博弈均衡的概念。纳什的主要学术贡献体现在 1950 年和 1951 年的两篇论文之中（包括一篇博士论文）。1950 年他才把自己的研究成果写成题为“非合作博弈”的长篇博士论文，1950 年 11 月刊登在美国全国科学院每月公报上，立即引起轰动。说起来这全靠师兄戴维·盖尔之功，就在遭到冯·诺依曼贬低几天之后，他遇到盖尔，告诉他自己已经将冯·诺依曼的“最小最大原理”（minimax solution）推到非合作博弈领域，找到了普遍化的方法和均衡点。盖尔听得很认真，他终于意识到纳什的思路比冯·诺伊曼的合作博弈的理论更能反映现实的情况，而对其严密优美的数学证明极为赞叹。盖尔建议他马上整理出来发表，以免被别人捷足先登。纳什这个初出茅庐的小子根本不知道竞争的险恶，从未想过要这么做，结果还是盖尔充当了他的“经纪人”，代为起草致科学院的

短信，系主任列夫谢茨则亲自将文稿递交给科学院。纳什写的文章不多，就那么几篇，但已经足够了，因为都是精品中的精品。

纳什在上大学时就开始从事纯数学的博弈论研究，1948 年进入普林斯顿大学后更是如鱼得水，20 岁出头已成为闻名世界的数学家。特别是在经济博弈论领域，他做出了划时代的贡献，是继冯·诺依曼之后最伟大的博弈论大师之一。他提出的著名的“纳什均衡”的概念在非合作博弈理论中起着核心的作用。后续的研究者对博弈论的贡献，都是建立在这一概念之上的。由于纳什均衡的提出和不断完善为博弈论广泛应用于经济学、管理学、社会学、政治学、军事科学等领域奠定了坚实的理论基础。

四、线性规划——康托罗维奇

列奥尼德·康托罗维奇(Leonid V. Kantorovich)是苏联著名经济学家，苏联科学院院士，苏联国家科学技术委员会国民经济管理研究所经济问题研究室主任。



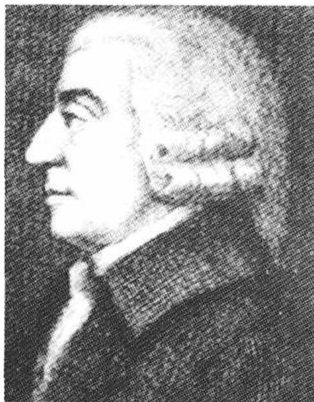
列奥尼德·康托罗维奇
(1912—1986)

康托罗维奇于 1938 年首次提出求解线性规划问题的方法——解乘数法。从此，他打开了解决优化规划问题的大门。这对现代应用数学和经济学的发展，有着深远的影响，这时，康托罗维奇年仅 26 岁。现在我们常用的求解线性规划问题的方法——单纯形法，则是由美国数学家丹泽和豪尔维茨在 1947 年发明的，比康托罗维奇晚了近 10 年。

有人评价说，二三十岁期间，康托罗维奇作为一个青年数学家，已经登上数学奥林匹斯山的高峰。随后，康托罗维奇继续踏实地迈进，他发现一系列涉及如何科学地组织和计划生产的问题，都属于线性规划问题。比如，怎样最充分地利用机器设备，如何最大限度地减少废料，最有效地使用燃料，怎样最合理地组织货物运输，最适当地安排农作物布局等。康托罗维奇为线性规划方法的推广和运用做了大量工作。

1949 年，苏联政府为表彰他在数学研究工作中的成就，授予康托罗

维奇斯大林奖。在荣誉面前，康托罗维奇没有固步自封，而是继续向前。他由研究单个企业如何最优地组织和计划生产，上升到更高一级的探索，即怎样对整个国民经济实行最优计划管理，怎样在整个国民经济范围内实现资源的最优利用。



亚当·斯密(1723—1790)

早在18世纪70年代，英国古典经济学家亚当·斯密在《国富论》中曾提出"看不见的手"在资源分配和生产调节中的作用。但他所说的"看不见的手"，反映了自由竞争条件下价格机制的作用。此后，世界各国的许多经济学家，如英国的马歇尔、庇古，意大利的帕累托、巴伦等都对资源最优分配和利用进行过探讨。但是，这些研究都只停留在理论说明和一般数学表述上。

康托罗维奇通过建立资源最优利用的线性数学模型，应用解乘数法求解出各种乘数，这些乘数就是衡量资源稀缺程度的尺度，是企业在采用不同资源，选择不同生产时比较劳动消耗大小的计量标准。他从经济意义上把这些数称为"客观制约估价"(在西方同类著作中，一般称为"影子价格")。

这里所说的资源，主要是那些既具有高效能，又具有稀缺性的生产要素，如优质的土地以及有技能的熟练劳动者。从客观制约估价出发，企业在选取不同资源和不同生产方法时，就要认真地进行经济核算，不能盲目地去使用具有高估价的稀缺资源。这样，就可以实现全社会范围的资源最优分配和利用。这时，在现有资源条件下，全社会能够以最小的劳动消耗，获得最大限度的生产量。由此得出的生产计划叫做最优计划。

康托罗维奇不仅作为一个颇具声望的数学家活跃于自然科学界，而且还作为一个经济学家出现在社会科学界。1965年，为表彰他在经济分析和计划工作中应用数学方法的成绩，苏联政府又授予他列宁奖。

1975年，63岁的康托罗维奇与美国经济学家佳林·库普曼斯共同获得诺贝尔经济学奖。他在领取该项奖金时发表了《数学在经济中的应用：成就、困难、前景》的演讲，他表示："数学方法在经济中的应用不会辜负我

们对它所抱的希望，它会给经济理论和实际工作做出重大的贡献。”


佳林·库普曼斯
（1910—1985）

在对现实经济问题的思考中，康托罗维奇于 1938 年首次提出求解线性规划问题的方法——解乘数法。这是对现代应用数学的一个首创性贡献，从此，打开了解决规划问题的大门。利用解乘数法解线性问题，具有广泛而重要的应用意义。康托罗维奇指出，提高企业的劳动效率有两条途径，一条是技术上的各种改进，另一条是对生产组织和计划方式的改革。过去，由于没有必要的计算工具，后一条途径很少被利用。解乘数法的提出，为求解线性规划问题，为科学地组织和计划生产开辟了现实的前景。他把这一方法用于一系列实践，诸如合理地分配机床机械的作业、最大限度地减少废料、最佳地利用原材料和燃料、最有效地组织货物运输、最适当地安排农作物的布局等等。解决这类问题的一般程序，概括起来就是，首先建立数学模型，即根据问题的条件，将生产的目标、资源的约束、所求的变量这三者之间的数量关系用线性方程式表达出来，然后求解计算。在一些国家的数学和经济学书刊中常常把这类模型称为“康托罗维奇问题数学模型”。

康托罗维奇在经济学领域的最大成就在于他把资源最优利用这一传统的经济学问题，由定性研究和一般定量分析推进到现实计量阶段，对线性规划方法的建立和发展做出了开创性贡献。

以上研究的是在一个企业的范围内如何科学地组织和计划生产的问题。随后，他在研究企业之间以及整个国民经济范围内如何运用线性规划方法时提出的客观制约估价，可以实现全社会范围的资源最优分配和利用。这时，在现有资源条件下，全社会能够以最小的劳动消耗，获得最大限度的生产量，由此得出的生产计划叫做最优计划。有时把客观制约估价称为最优计划价格。这是他革新、推广和发展资源最优利用理论的具体表现。

思考题：

1. 美国“独立宣言”为何借助欧几里得模型？
2. 中国密码学发展如何？
3. 何为博弈论？



第八章

数学与文化艺术

数学是一种会不断进化的文化。

——魏尔德(美国数学会主席)

数学是一种别具匠心的艺术。

——哈尔莫斯

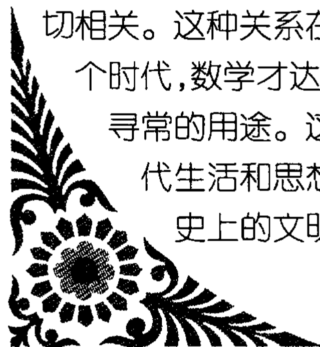
没有大胆的猜想,就做不出伟大的发现。

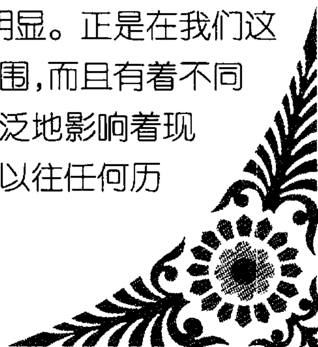
——牛顿

数学一直是形成现代文化的主要力量，同时又是这种文化极其重要的因素。数学也是一门需要创造性的学科。在预测能被证明的内容时，与构思证明的方法时一样，数学家们利用高度的直觉和想象。在数学中，人的创造能力运用的范围，只有通过检验这些创造本身才能决定。实用的、科学的、美学的和哲学的因素，共同促进了数学的形成。数学不仅是一种方法、一门艺术或一种语言，数学更主要的是一门有着丰富内容的知识体系，其内容对自然科学家、社会科学家、哲学家、逻辑学家和艺术家十分有用，同时影响着政治家和神学家的学说；满足了人类探索宇宙的好奇心和对美妙音乐的冥想；数学发展史表明，数学的生命力正是根植于养育她的文明的社会生活之中。

事实上，数学一直是文明和文化的重要组成部分，因此许多历史学家通过数学这面镜子，了解了古代其他主要文化的特征。以古典时期的古希腊文化为例，它大约从公元前 600 年延续到公元前 300 年。由于古希腊数学家强调严密的推理以及由此得出的结论，因此他们所关心的并不是这些成果的实用性，而是教育人们去进行抽象的推理，激发人们对理想与美的追求。因此，看到这个时代具有很难为后世超越的优美文学，极端理性化的哲学，以及理想化的建筑与雕刻，也就不足为奇了。

一个时代的总的特征在很大程度上与这个时代的数学活动密切相关。这种关系在我们这个时代尤为明显。正是在我们这个时代，数学才达到了它应该达到的范围，而且有着不同寻常的用途。这样，由于数学已经广泛地影响着现代生活和思想，今天的西方文明与以往任何历史上的文明都有着明显的区别。





第一节 数学与文化

一、数学和修辞

数学和文学的修辞方法往往是相通的。举例来说，中学课程里有“对称”，文学中则有“对仗”。对称是一种变换，变过去了但有些性质保持不变。轴对称，即是依对称轴对折，图形的形状和大小都保持不变。那么对仗是什么？无非是上联变成下联，但是字词句的某些特性不变。王维诗云：“明月松间照，清泉石上流。”这里，明月对清泉，都是自然景物，没有变；形容词“明”对“清”，名词“月”对“泉”，词性不变；其余各词均如此。变化中的不变性质，在文化中、文学中、数学中，都广泛存在着。数学中的“对偶理论”，拓扑学的变与不变，都是这种思想的体现。文学意境也有和数学观念相通的地方。徐利治先生早就指出“孤帆远影碧空尽”，正是极限概念的意境。

二、欧氏几何和中国古代的时空观

初唐诗人陈子昂有诗云：“前不见古人，后不见来者，念天地之悠悠，独怆然而涕下。”这是时间和三维欧几里得空间的文学描述。在陈子昂看来，时间是两头无限的，以他自己为原点，恰可比喻为一条直线。天是平面，地是平面，人类生活在这悠远而空旷的时空里，不禁感慨万千。数学正是把这种人生感受精确化、形式化。诗人的想象可以补充我们的数学理解。

三、数学的宏观和微观认识

宏观和微观是从物理学借用过来的，后来变成一种常识性的名词。以函数为例，初中和高中的函数概念有变量说和对应说之分，其实是宏观描述和微观刻画的区别。初中的变量说，实际上是宏观观察，主要考察它

的变化趋势和性态。高中的对应则是微观的分析。在分段函数的端点处，函数值在这一段，还是下一段，差一点都不行。政治上有全局和局部，物理上有牛顿力学与量子力学，电影中有全景和细部，国画中有泼墨山水画和工笔花鸟画，其道理都是一样的。是否要从这样的观点考察函数呢？

四、数学和美学

“1/2＋1/3＝2/5?”是不是和谐美？二次方程的求根公式美不美？这涉及美学观。三角函数课堂上应该提到音乐，立体几何课总得说说绘画，如何把立体的图形画在平面上。欣赏艾舍尔（M. C. Escher）的画、计算机画出的分形图，也是数学美的表现。

五、数学与语言

语言是文化的载体和外壳。数学的一种文化表现形式，就是把数学融入语言之中。“不管三七二十一”涉及乘法口诀，“三下五除二就把它解决了”则是算盘口诀。再如“万无一失”，在中国语言中比喻“有绝对把握”，但是，这句成语可以联系“小概率事件”进行思考。“十万有一失”在航天器的零件中也是不允许的。此外，“指数爆炸”、“直线上升”等等已经进入日常语言，它们的含义可与事物的复杂性相联系（计算复杂性问题），值得我们去研究。“事业坐标”、“人生轨迹”也已经是人们耳熟能详的词语。

（1）半斤八两：中国古代的秤是十六两一斤，所以半斤即为八两，八两即半斤，意思就是旗鼓相当。但这是个贬义词，是指两个人差不多，谁也不比谁好多少。

（2）十五个吊桶打水七上八下：多么形象啊！用来形容人忐忑不安的心情再恰当不过了。

（3）十拿九稳：指做事情的成功率已达到百分之九十或百分之百了。用来形容把握性很大。

（4）一不做二不休：在数学上，二是一的后继。在这里表示做了一件坏事，索性再干第二件坏事。

（5）一百八十度大转弯：一百八十度是平角，指一个人突然改变了方

向，新的方向与原来的方向成平角，方向正好相反。也就是指他的新观点或新方法与原来的观点或方法正好相反。

(6)一问三不知：在前面我们讲过，古人把三看作一个大数，这句话的意思就是说问他什么都说不知道。

在成语中也有许多带数字的，比如：以一当十、千军万马、一心一意、三心二意、七嘴八舌、横七竖八等。

古代诗歌中用到数字的情形就更多了，比如杜甫的名句：

两只黄鹂鸣翠柳，
一行白鹭上青天。

李白的名句：

飞流直下三千尺，
疑是银河落九天。

诗坛大家尚且对数字如此青睐，其他的诗人就更不必说了。比如，宋朝邵唐写的《蒙学诗》：

一去二三里，烟村四五家，
亭台六七座，八九十枝花。

作者在短短四句诗里就用全了一到十的十个数字，恰当地表现了自然的美景，不仅琅琅上口，而且甚富情趣。

相传清朝乾隆皇帝下江南时看见一幅渔翁垂钓的情景，便命随行的大臣纪晓岚作诗一首，诗里面必须有"一"字。纪晓岚才思敏捷，很快就作出来了，这首诗是：

一丈长竿一寸钩，一蓑一笠一扁舟，
一天一地一明月，一人独钓一江秋。

短短的 28 个字中竟连用了 10 个"一"字，而且情趣独具。这首诗由于构思奇特，后来诗人多有仿作。比如就有这样的诗：

一帆一桨一渔舟，一个渔翁一钓钩。
一俯一仰一顿笑，一江明月一江秋。

可是读起来总觉得与纪晓岚那首相去甚远，而且纪晓岚那首诗中虽然写的是渔翁垂钓，但是不仅"渔翁"二字没有出现，就连个"渔"字也没有出现。可是这首仿作，不仅"渔翁"出现了，而且连着出现两个"渔"字，这

是败笔，足见纪晓岚的文字造诣高深。

相传这首《芦花飞雪》是乾隆皇帝所作的数字诗：

一片一片又一片，两片三片四五片，

六七八九十来片，飞入芦花都不见。

你可能也听说过“唐诗、宋词、元曲”的说法，说的是我国古代唐朝诗歌最发达，像李白、杜甫、白居易都是唐朝的。元朝戏曲很发达，像《窦娥冤》、《西厢记》等都是这个时候的作品。元朝有一首曲子叫《雁儿落带过得胜会》很有意思，全曲竟一下子用了 22 个“一”字，把作曲人的伤悲表现得淋漓尽致。

一年老一年，一日没一日，一秋又一秋，一辈催一辈。一聚一离别，一喜一伤悲。一榻一身卧，一生一梦里。寻一伙相识，他一会咱一会，都一般相知，吹一会唱一会。

前面说的基本都是古代的事情。数学发展到了今天，特别是电子计算机出现以后，数学与文化之间的关系更密切了。机器人绘画、机器人作曲，甚至连机器人写作都出现了。但是，机器人能不能成为真正的艺术家呢？回答是：不可能！

因为计算机采用的是逻辑线路，它的“思维”是逻辑思维，不可能有心理活动，也不可能有情感。而艺术家的创作靠的是形象思维，创作的是以审美为目的的精神产品，是必须有情感参与的心理活动。但是在文学艺术的研究中，数学手段，特别是模糊数学的手段被越来越多地应用。

第二节　数学与艺术

一、达·芬奇：绘画是一门科学，其基础是数学

达·芬奇(Leonardo daVinci，1452—1519)是整个文艺复兴时期最卓越的代表人物之一，他的天才不仅限于艺术，在数学、机械工程、医学、地质、生物等学科都有重要的思想和发现。在绘画理论方面，著有《绘画

论》，把解剖、透视、明暗和构图等零碎的知识，整理成为系统的理论，对后来欧洲绘画发展影响很大。他还是一个数学家，第一次在数学上使用加减符号的就是达·芬奇。他认为：和其他科学一样，绘画是一门科学，其基础是数学。他在评价数学时说："在科学中，凡是和数学没有联系的地方，都是不可靠的。"



达·芬奇(1452—1519)

达·芬奇出生于佛罗伦萨附近的芬奇镇。1482年，达·芬奇第一次去米兰，投奔米兰大公摩罗，以建筑师、军事工程师、雕刻家和画家的身份为大公服务了17年。这期间，达·芬奇不仅创作了一些重要美术作品，在科学研究、水利工程、城防建筑和军事技术等方面也有出色的贡献。《岩间圣母》和为圣玛利亚·代拉格拉契修道院食堂所作的壁画《最后的晚餐》即是这时期的作品。达·芬奇还为米兰大公的父亲雕塑了一尊骑马像，因法军入侵，最终没翻制成铜像。

1499年由于法军入侵米兰，摩罗逃亡，达·芬奇回到佛罗伦萨，在1503—1506年间，完成了举世名作《蒙娜丽莎》。1506年春，达·芬奇回到米兰，在以后的年代里，他绘制了《丽达与天鹅》、《施洗约翰》、《圣安娜与圣母》，从这些作品里可以看出达·芬奇在艺术创作道路上已度过了他的顶峰。达·芬奇的一生，是为科学、为艺术奋斗的一生。他多方面的才能，不仅为我们留下一批珍贵的艺术遗产，而且在科学史上也写下了光辉的篇章。他的成就和影响远远超出他所处的时代。文艺复兴产生了达·芬奇这样伟大的人物，不仅是意大利人民的骄傲，也是整个人类的骄傲，他的艺术将永远成为全世界人民的共同财富。

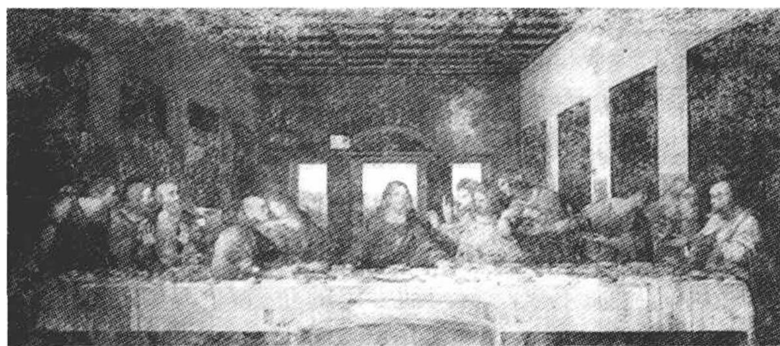
毫无疑问，达·芬奇是15至16世纪的一位艺术大师和科学巨匠。文艺复兴时期的传记作家瓦萨里曾这样赞美他："上天有时候将美丽、优雅、才能赋予一人之身，他之所为无不超群绝寰，显示出他的天才来自上苍而非人间之力，达·芬奇正是如此。他的优雅与伟美无与伦比，他才智之高使一切难题无不迎刃而解。"

达·芬奇通过广泛而深入地研究解剖学、透视学、几何学、物理学和

化学，为从事绘画做好了充分的准备。他对待透视学的态度可以在他的艺术哲学中看出来。他用一句话概括了他的《艺术专论》的思想："欣赏我的作品的人，没有一个不是数学家。"

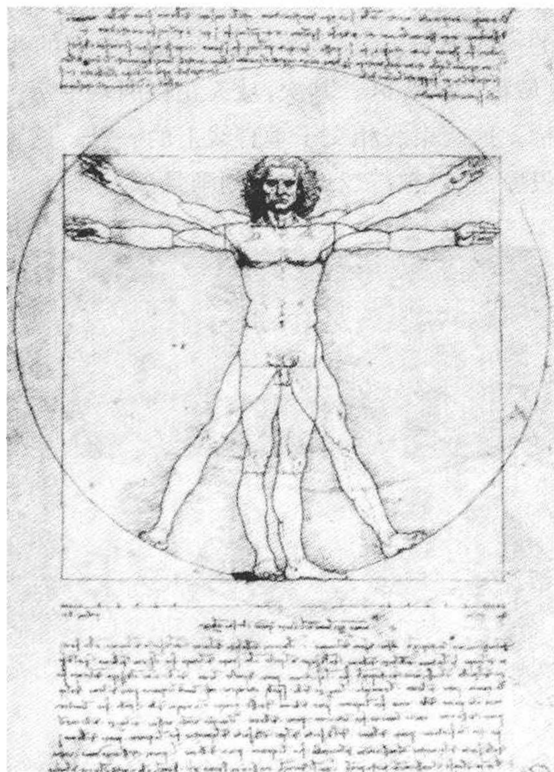
达·芬奇坚持认为，绘画的目的是再现自然界，而绘画的价值就在于精确地再现。因此和其他科学一样，绘画是一门科学，其基础是数学。他指出："任何人类的探究活动也不能成为科学，除非这种活动通过数学表达方式和经过数学证明为自己开辟道路。"

达·芬奇创作了许多精美的透视学作品。这位真正富有科学思想和绝伦技术的天才，对每幅作品都进行过大量的精密研究。他最优秀的杰作都是透视学的最好典范。《最后的晚餐》描绘出了真情实感，一眼看去，与真实生活一样。观众似乎觉得达·芬奇就在画中的房子里。墙、楼板和天花板上后退的光线不仅清晰地衬托出了景深，而且经仔细选择的光线集中在基督头上，从而使人们将注意力集中于基督。12 个门徒分成 3 组，每组 4 人，对称地分布在基督的两边。基督本人被画成一个等边三角形，这样的描绘目的在于表达基督的情感和思考，并且身体处于一种平衡状态。



达·芬奇《最后的晚餐》

达·芬奇广泛研究了人体的各种比例。右边一张图画的是他对人体的详细研究，图中标明了黄金分割的应用。这是一张他为朋友、数学家帕西沃里的《神奇的比例》(1509)所作的图解。



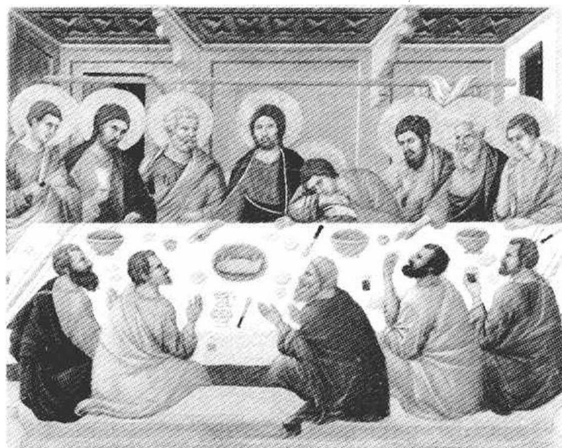
达·芬奇《人体的比例》

二、杜乔、洛伦采蒂等:在绘画中引入了三维

文艺复兴时期的绘画与中世纪绘画的本质区别在于引入了第三维，也就是在绘画中处理了空间、距离、体积、质量和视觉印象。三维空间的画面只有通过光学透视体系的表达方法才能得到。这方面的成就是在14世纪初由杜乔(Duccio,1255—1319)和乔多(Giotto,1276—1336)取得的。在他们的作品中出现了几种方法,而这些方法成为数学体系发展过程中的一个重要阶段。

杜乔的作品中明显地出现了三维的表现方式。画面上的景物有一定的质量和体积,而且彼此相关,构成了一个整体,平面被缩小了,光线和阴影也用来暗示体积。《最后的晚餐》是杜乔的名作,在这幅画中,后景墙和

后景天花板缩短了，以衬托出景深。房间的各个部分都安排得很恰当。在处理天花板的一些细节上，他花了很大工夫。中部的线条都集中在一个区域，这个区域称为投影区。其次，从天花板两端中每一部分引出的线都关于中心对称。这两束线相交于垂直线上的一点。这种方法叫作垂直投影法或轴向投影法，已被广泛地用于刻画景深。



杜乔《最后的晚餐》

技巧和观念上的进步则应归功于洛伦采蒂（Ambrogio Lorenzetti，1323—1348），他所选取的题材具有现实性，他的线条充满生机，画面健康活泼，富有人情味。在《圣母领报图》中，景物所占据的地面给人以明确的现实感，而且与后墙明显地分开了。地面既作为对物体大小的度量，又暗示出空间向后延伸，直到后墙，其次，从观察者角度看，楼板线条都向后收缩并交于一点。最后，房屋伸向远处时逐渐缩小了，以致最后消失在背景中。

在洛伦采蒂身上，我们看到了文艺复兴时期的艺术家在引入光学透视体系前所得到的最高水平。这个时期还是探索阶段，得到许多具体结果，但不系统，还没有成为绘画科学。



洛伦采蒂《圣母领报图》

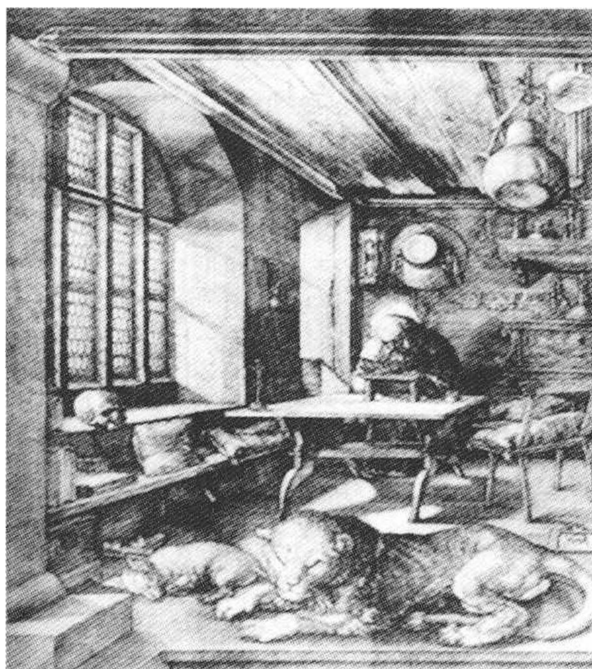
三、丢勒:透视和幻方在绘画中的应用



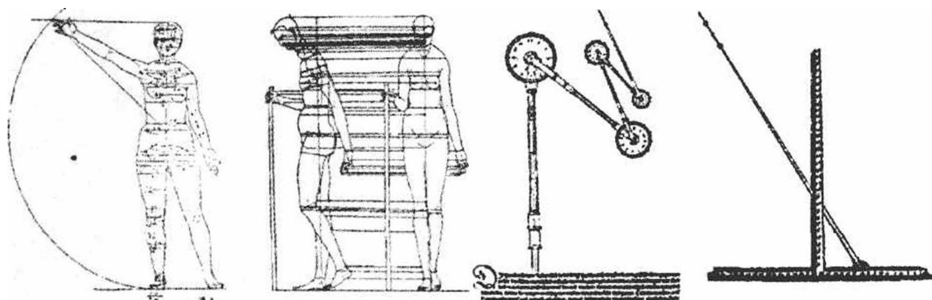
阿尔布雷特·丢勒
(1471—1528)

丢勒在意大利旅行时曾学习数学和透视；1506 年，他在威尼斯购买了欧几里得的《几何原本》，在波伦亚学习透视艺术(很可能是向帕西沃里学的)。回德国后，丢勒于 1525 年以德文出版《尺规测量艺术引论》，论述介绍线性几何、平面图形、立体图形的有关命题以及透视理论。他认为，创作一幅画时，应依据透视的数学原理进行构图。

丢勒是一位几何学家。他寻求将人体的形状归结为数学原理，这在他的数以百计的素描作品中得到说明。他的这些比例研究说明，他企图使用科学的方法来描绘人体。



丢勒《圣徒杰罗姆在书房》(雕版画,1514)

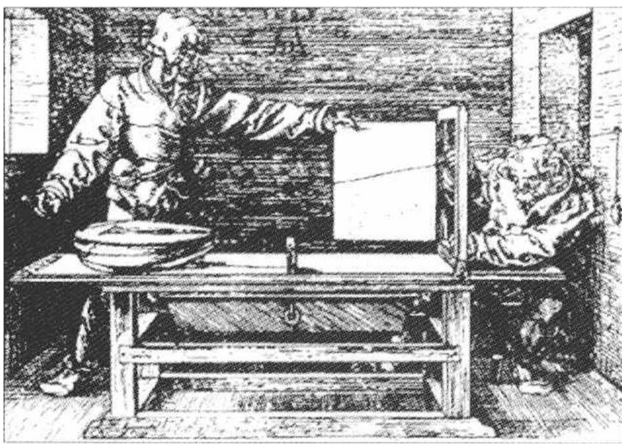


丢勒的人体素描

丢勒还设计了三种椭圆作图仪器,左图所示齿轮仪器用于画螺线和摆线;右图所示仪器则用于画椭圆

丢勒的《画家手稿》(The Painter's Manual)(1538)中创造了许多德文数学术语,如称椭圆为 Eierlinie(蛋形线),称双曲线为 Gabellinie(叉形线),称抛物线为 Brennlinie,指抛物镜的燃烧性质。

文艺复兴时期的画家们用现实主义手法将三维空间表现在二维的画布上，他们的研究导致了射影几何学的复兴。下图是丢勒《引论》中的木刻画，说明他发明的用以将三维物体转化为二维画的仪器：一位画家坐在他的画布前，画布装在用铰链固定在桌面上的一个垂直的框架上。桌上放置一把琵琶。他的助手将画布转到一边，并将线的自由端固定在琵琶的某个部位；画家顺着线观看。线经过框架上的某一点，画家用水平和垂直的两根线来固定它。然后松开直线，将画布转回框架中，画家在其上标出刚才固定好的那个点。再把画布转开，助手把直线移到琵琶的另一个部位，重复前面的程序。这样，画家渐渐获得了琵琶轮廓的精确透视图。



丢勒《引论》中用机械方法作透视画

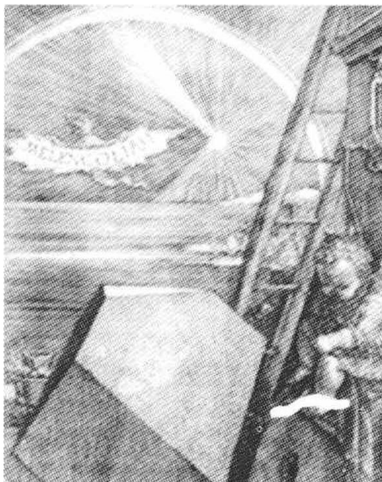
丢勒对数学的爱好可以从他的铜版画《犹豫》(Melencolia，1514)中反映出来。除了中心透视的应用，墙上的幻方、复杂的多面体、球体，都象征着对于数学难题的长期思索无获而产生的犹豫情感。这是他所画过的最好的自画像。



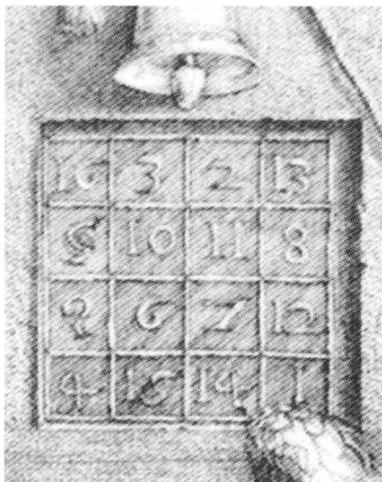
丢勒《犹豫》(Melencolia)

《犹豫》中的多面体的表面似乎由两个等边三角形和六个不规则的多边形构成。有人据此还猜想：丢勒不是根据模型，而是根据

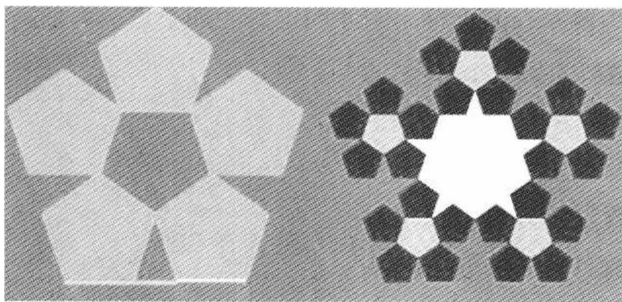
一个大的方解石晶体来画多面体的。还有人进一步认为，如果上述猜想是对的，那么晶体学历史应该向前推大约 100 年。



多面体



幻方



丢勒构造的历史上第一个分形

Ⅱ　　Ⅰ

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Ⅲ　　Ⅳ

丢勒幻方

《犹豫》中的幻方有以下性质：

（1）每行、每列和每条对角线上的数字之和为 34。

（2）关于两对角线交点对称的任意两数的和为 17。

（3）每一象限（Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ）的数字之和为 34。

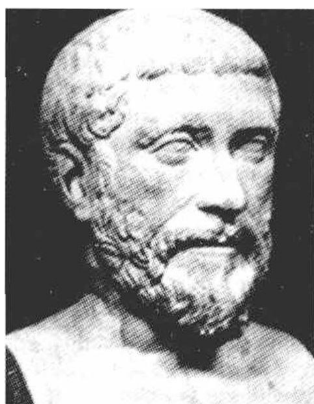
（4）Ⅰ、Ⅲ象限的上行数字之和相等，且等于Ⅱ、

Ⅳ象限的下行数字之和；Ⅰ、Ⅲ象限下行数字之和相等，且等于Ⅱ、Ⅳ象限的上行数字之和。

（5）Ⅰ、Ⅲ象限的右列数字之和相等，且等于Ⅱ、Ⅳ象限的左列数字之和；Ⅰ、Ⅲ象限左列数字之和相等，且等于Ⅱ、Ⅳ象限的右列数字之和。

四、黄金分割率——0.618

黄金分割是古希腊哲学家毕达哥拉斯发现的。一天，毕达哥拉斯从一家铁匠铺路过，被铺子中那有节奏的叮叮当当的打铁声所吸引，便站在那里仔细聆听，似乎这声音中隐匿着什么秘密。这个声音的比列被毕达哥拉斯用数理的方式表达出来，他最后确定 1∶0.618 的比例截断最优美。后来，德国的美学家泽辛把这一比例称为黄金分割率。这个规律的意思是，较大部分与整体之比等于较小部分与较大部分之比。无论什么物体、图形，只要它各部分的关系都与这种分割法相符，这类物体、图形就能给人最悦目、最美的印象。后来很多人专门研究过，开普勒称其为“神圣分割”，也有人称其为“金法”。他曾说：“几何学有两个宝藏，一个是勾股定理，另一个是黄金分割。”黄金分割总是与美学联系着。



毕达哥拉斯（约公元前580—约公元前500年）

对人体解剖很有研究的意大利画家达·芬奇发现，人的肚脐位于身长的0.618处；咽喉位于肚脐与头顶长度的0.618处；肘关节位于肩关节与指头长度的0.618处，人体存在着肚脐、咽喉、膝盖、肘关节四个黄金分割点，它们也是人赖以生存的四处要害。

《蒙娜丽莎的微笑》是达·芬奇最著名的作品之一，画中达·芬奇将人体结构的黄金比例运用于人物绘画，蒙娜丽莎的头和两肩在整

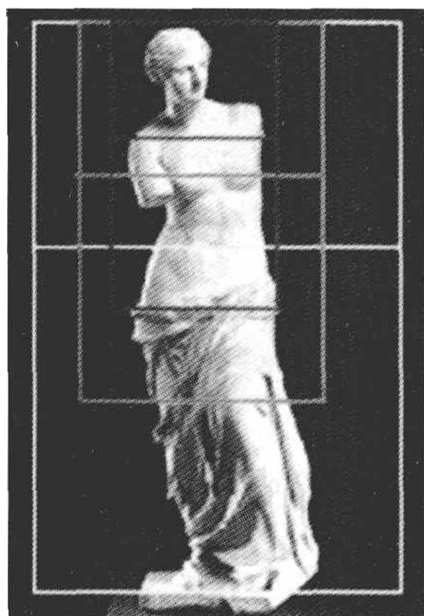


开普勒（1571—1630）

幅画面中都完美地体现了黄金分割，取得了极佳的艺术效果。



蒙娜丽莎的微笑



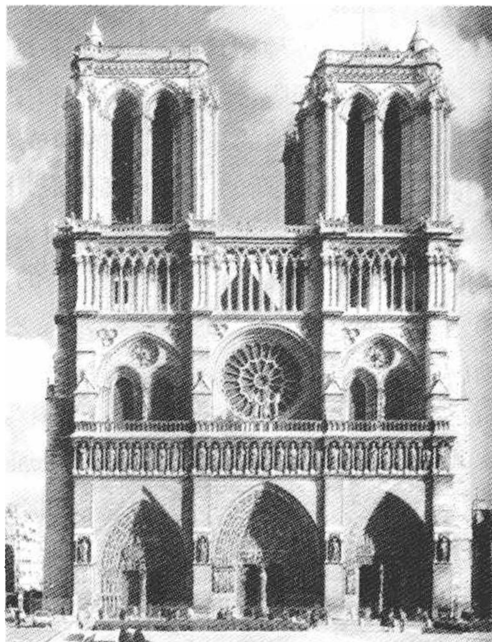
爱神维纳斯

《爱神维纳斯》是古希腊最优美的雕塑作品之一。它的设计与创作中就巧妙地融入了黄金分割的思想。古希腊人认为最优美的体形，应该是把肚脐作为身长的黄金分割点，经过测量可以推算，维纳斯下半身长与全身长的比值大约就是 0.618。

在建筑中，黄金分割也依然散发着美的讯息，在 2000 多年前修建的古希腊著名的帕提农神庙，是西方古典建筑的典范之作，它的高和宽就是严格按照 0.618 这个比值来建造的，所以我们才觉得它是如此匀称、美观。另外，如果一个长方形的宽与长的比值正好是黄金数，

这个长方形就叫做“黄金长方形”。在过去很长的时间内，“黄金长方形”曾统治着西方世界的建筑美学，其中巴黎圣母院就是一个典型的代表。

被誉为“古代建筑史之奇迹”的埃及金字塔竟然也是运用黄金分割的典范，就拿其中最大的胡夫金字塔来说吧，底边边长 230.4 米，高 146.6 米，比值竟然是 0.636，与 0.618 如此相近！

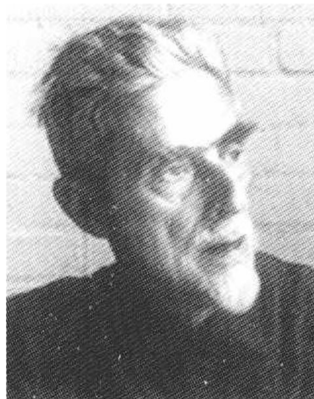


巴黎圣母院



胡夫金字塔

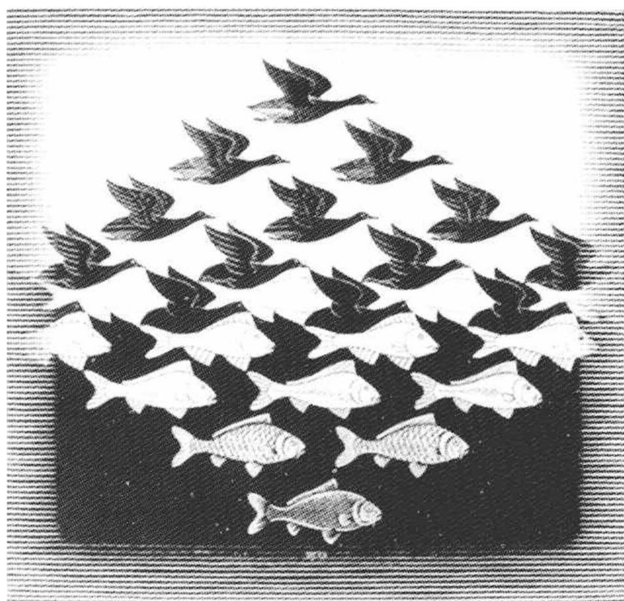
五、埃舍尔的数学画



摩里茨·科奈里斯·埃舍尔
(1898—1972)

埃舍尔称自己为一名"图形艺术家",的确如此。20 世纪 90 年代后期,计算机虚拟技术的飞速发展,让人们发现,埃舍尔作品中的视觉模拟和今天的虚拟现实方法是如此相像,而他的各种图像美学也几乎是今天电脑图像视觉的翻版,充满电子时代和中世纪智性的混合气息。他的三维空间的构成、二维到三维的变换、彭罗斯的三角原理的应用等等都对现在的计算机虚拟现实技术起到了启发和指引的作用。因此,有人说,埃舍尔的艺术是真正超越时代,深入自我理性的现代艺术。他是当之无愧的三维空间图画的鼻祖。

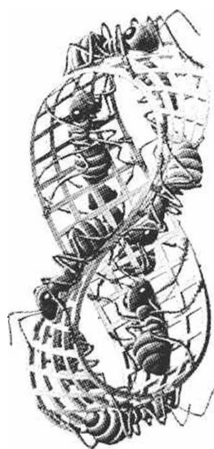
谈到埃舍尔,首先让人联想到的就是"迷惑的图画":无穷变换的空间中通向楼上的楼梯不知为何返回到了原地;鸟儿在飞翔过程中不知不觉地演变成了鱼儿;同一只蚂蚁可以在一条封闭的带子的两个面上爬行……每每看到埃舍尔的作品都被其中极强的空间感和特有的魔力所征服。他利用人的视觉错误,让他的作品在三维空间里游戏。以非常精巧考究的细节写实手法,生



天鱼水之一(1938)

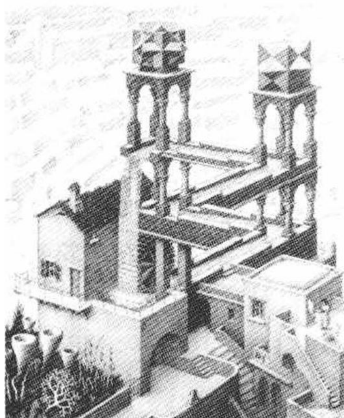
动地表达出各种荒谬的结果，几十年来，始终令人玩味无穷。

学建筑出身的埃舍尔出入艺术界，却不被同行认可。因其特立独行的画风，至今无法用某个具体的流派来划分。然而，科学界的认同，让艺术界的拒绝显得更加刺眼。1954 年的“国际数学协会”在阿姆斯特丹专门为他举办了个人画展，这在现代艺术史上是罕见的。人们注意到埃舍尔作品中的艺术性和科学性。他自己也曾经说过，所有的作品都是通过精确的计算创作出来的。在他的作品中艺术和科学得到了完美的统一。

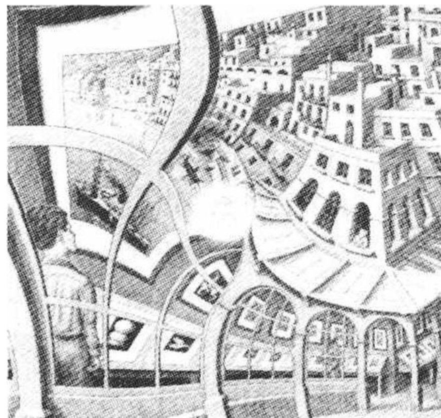


莫比乌斯带(之二)
(木刻，1963)

1961 年的《瀑布》是埃舍尔最后期的奇异建筑式图画，他依据彭罗斯的三角原理，将整齐的立方物体堆砌在建筑物上。这种不合情理的结构亦见于 1958 年的《瞭望塔》。他应用拓扑学领域中的对象和概念创造了《画廊》和《阳台》。在《画廊》中，扭曲的画廊演变为城市的一角，时空的变换，自然而协调。



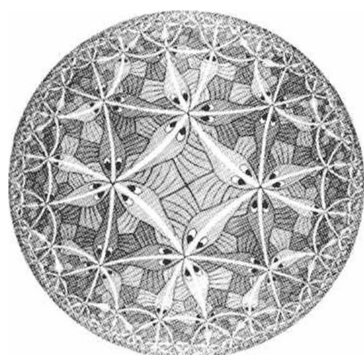
瀑布



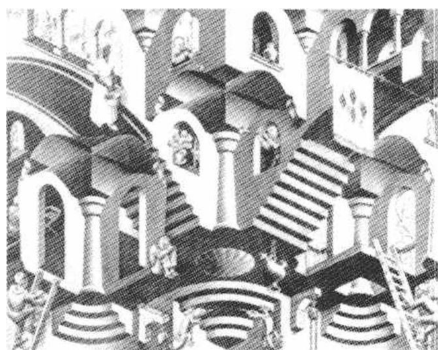
画廊

他利用射影几何中的概念——透视、传统意义上的投影点和他自己的曲线投影点，使《圣彼得的罗马》、《通天塔》和《高与低》中产生深度和维度的感觉。在《漩涡》中，螺线把人们的目光带上无尽的旅程。在《方极限》中，凸现出趋向边界的无穷序列的感觉。而《圆极限》则可说是亨利·

庞加莱的有界又无限的非欧几何的理想模型。在《立方空间分割》中，我们同时获得无穷大和空间镶嵌图案的概念。在《凹和凸》中，振荡错觉让我们的眼睛和头脑在不可信的结构以及人物造型的内部和外部被弄得忽前忽后。数学家在他的作品中找到了难以言喻的“对称、精确、规则、循序”等特性的美。



圆极限



凹与凸

第三节　数学与建筑

一、古代建筑中的数学知识

在古代埃及和巴比伦，新庙址的测量乃是按严格的几何和天文方法进行的，而且是法老和僧侣阶级的特权。因此宗教以及官方建筑都呈现规则的几何形状，而世俗的建筑常常被有意地设计成倾斜的和不规则的。在埃及，几何仪器和基本的几何图形，如犹太人的大卫星形，被看作是神圣的符号而被用作护身符。

说到古埃及建筑，我们不能不提及金字塔。关于建成于约公元前2575年的吉萨胡夫金字塔，人们至少提出过几种理论对其形状进行解释，其中至少有四种与实测结果相符。1855年，德国学者洛贝最先提出：金字塔的建筑中使用了黄金数$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{3}$。洛贝发现，胡夫金字塔侧面与底面的夹角的余割恰好等于黄金数。

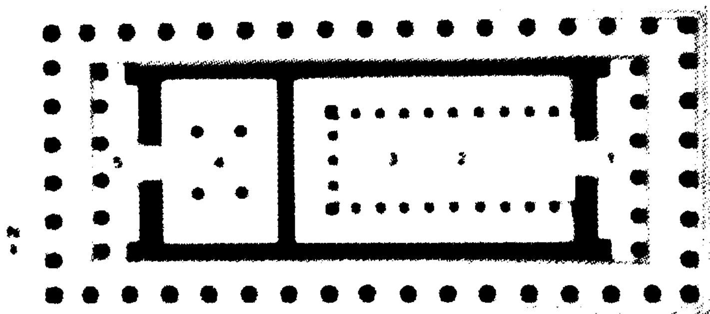


古埃及 Ramses Ⅱ与测量女神 Seschat 用木桩标出新庙址

古希腊毕达哥拉斯学派发现，音的和谐与弦长的整数比有密切关系：1∶2、2∶3和3∶4分别对应八度、五度和四度音程。有理由相信，这一发现，连同该学派“万物皆数”的信条对于古希腊的建筑产生过深远的影响。让我们来看著名的雅典卫城帕提农神殿的尺寸，神殿台基的长（东西向）为69.5米，宽（南北向）为30.9米；圆柱的底径为1.9米，高为10.44米；圆柱中心轴距离为4.29米。不难发现：台基的宽和长之比、圆柱底径与中心轴间距之比、水平檐口高（柱高加上檐部高3.29米）与台基宽之比



帕提农神殿



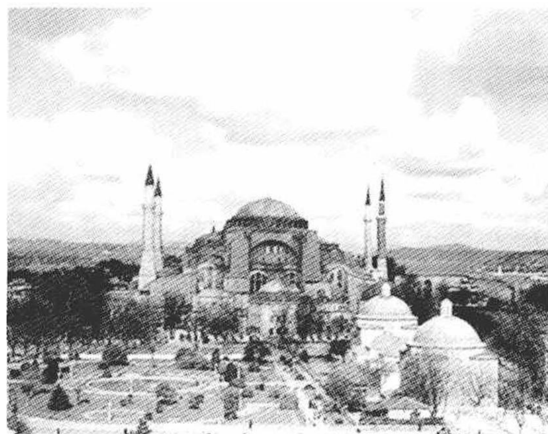
帕提农神殿平面图

均为4∶9。

自古希腊以来，规则的几何图形一直都被用来表达美与和谐。希腊语中，“对称”这个术语原来指的就是从一个建筑、一座雕塑或一幅绘画的最小部分到整体的形状和比例的重复。

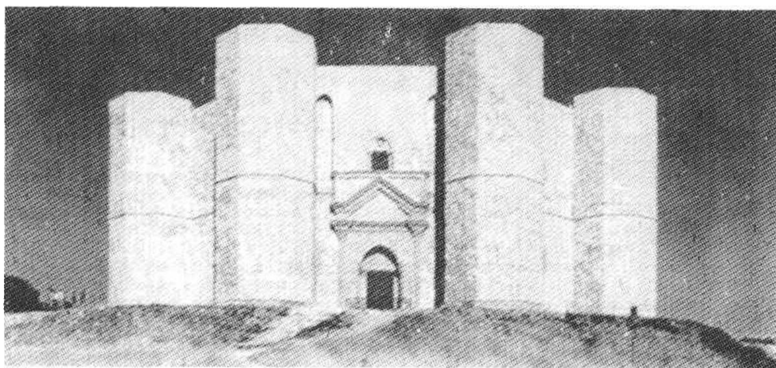
在欧洲中世纪，教堂和修道院的建筑都必须符合一定的规则。在这些建筑的设计中，正多边形（尤其是等边三角形、正方形、正六边形和正八边形）占据着统治地位，而修道院的世俗部分则建成倾斜的形状。在Assisi的圣弗朗西斯第教会教堂内由Giotto di Bondone和他弟子所作的一副画显示了分别代表顺从（Obedientia）、谦卑（Humilitas）和智慧（Prudentia）三种德行的人物，人物头上带着正方形和正六边形的光环，在中世纪建筑的几何规则里往往包含象征意义，具有神秘主义色彩。

在古希腊时期和古罗马时期，建筑师必须同时也是数学家。查士丁尼大帝统治时期（527—565）建成的拜占庭帝国最辉煌的建筑、首都君士坦丁堡的圣索菲亚大教堂即是由两位小亚细亚数学家伊西多鲁洛斯（Isidoros）和安泰缪斯（Anthemius）负责设计的。当时的拜占庭历史学家普洛可比乌斯（Procopieus，约490—562）这样描述该教堂：“人们觉得自己好像来到了一个可爱的百花盛开的芳草地，可以欣赏到紫色的花、绿色的花；有些是艳红的，有些闪着白光。大自然像画家一样把其余的染成斑驳的色彩。一个人到这里来祈祷的时候，立即会相信：并非人力、并非艺术，而是只有上帝的恩泽才能使教堂成为这样，他的心飞向上帝，飘飘荡荡，觉得离上帝不远……”

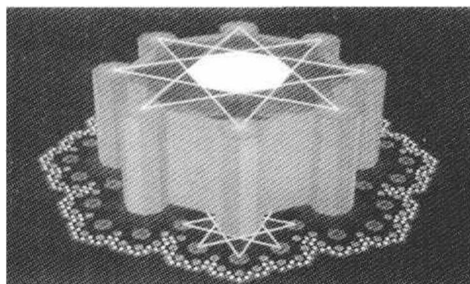


圣索菲亚大教堂

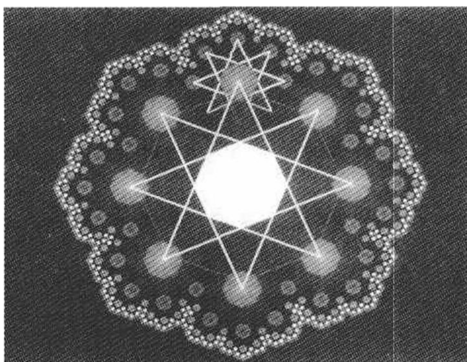
13世纪，神圣罗马帝国皇帝弗雷德里克二世所建造的著名的山城即呈正八棱柱形，而外墙的每一个角上又分别建有一个正八棱柱。从空中拍摄的图形来看，过城堡内八边形每一边的直线构成一个八角星，八角星的每一个顶点恰恰位于相应角上正八边形的中心；而角上正八边形的朝内的一个顶点正是城堡外八边形的一个顶点。外八边形、内八边形和角上八边形的边长之比为0.618，如果再按同样的方法不断在每一个小八边形外作出八个更小的正八边形，并保留朝外的五个，那么最后所得的图形乃是一个漂亮的分形图案。



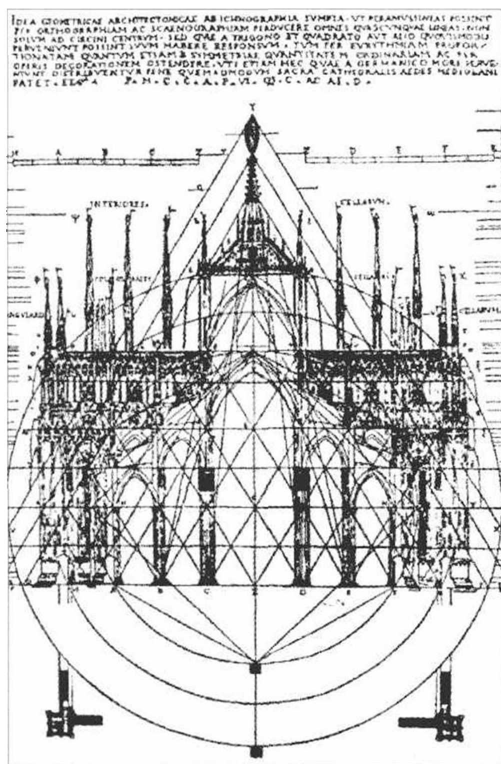
意大利南部 Apulia 的 Monte 城堡



分形图案 1



分形图案 2



《建筑十书》中米兰大教堂立视图

公元 1 世纪罗马建筑师维特鲁威（Vitruvius）在所著《建筑十书》（*Ten Books on Architecture*）中宣扬数学在艺术和建筑中的作用。这部著作对建筑理论和实践的影响一直延续到 18 世纪末。另一位著名的建筑师帕拉第奥（Palladio）于 1570 年写道：

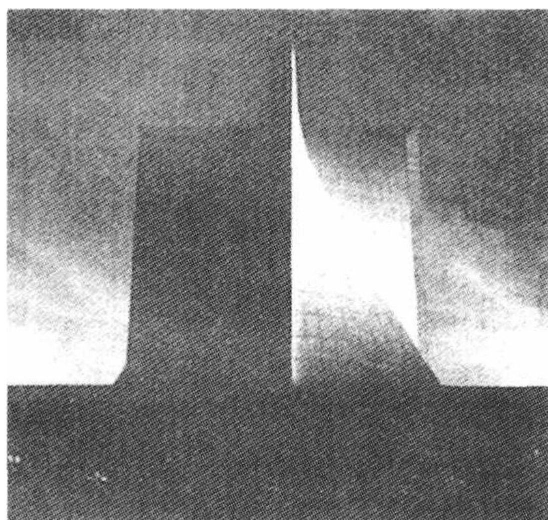
“音调的纯粹比例乃是听着和谐，空间的纯粹比例乃是看着和谐。这样的和谐给予我们快乐的感觉，但是除了寻求事物原因者外，没有人知道为什么这样。”

16 世纪著名建筑师 Wentzel Jamnitzer 发现，正多面体、半正多面体和星形多面体用于建筑设计很吸引人。他曾经总结了 120 种正多面体的漂亮图案。早在 18 世纪，建筑师 Etienne-Louis Boullée 就试图将规则几何形状用于建筑中，但直到 1928 年，才有一座球形建筑在德累斯顿诞生，可惜毁于“二战”。几何形状还被广泛用于桥梁建筑、屋顶和墙

面上。分形几何的诞生必会激发建筑师们新的灵感。

我们非常熟悉某些用于建筑的数学形式，诸如正方形、矩形、锥形和球形等等。但有一些建筑结构却以人们知之甚少的形状设计。一个引人注目的例子便是旧金山圣母玛利亚大教堂所用的双曲抛物面设计。该设计出自 P. A. 鲁安、J. 李以及罗马的工程顾问 P. L. 奈维、马萨诸塞州工程学院的 P. 比拉斯奇等人。

在剪彩仪式上，当人们问到对于该教堂米开朗基罗会怎么想时，奈维回答道："他不可能想到它，这个设计来自那时尚未证明的几何理论。"



旧金山圣母玛利亚大教堂

建筑物的顶部是一个 2135 立方英尺的双曲抛物面体的顶阁，楼面的上方有 200 英尺上升的围墙，由四根巨大的钢筋混凝土塔支撑着，该塔延伸到 94 英尺的地下，每座塔重达 900 万磅。墙由 1680 间钢筋混凝土结构的库房组成，含有 128 种不同的规格。正方形基础的大小为 255×255 平方英尺。

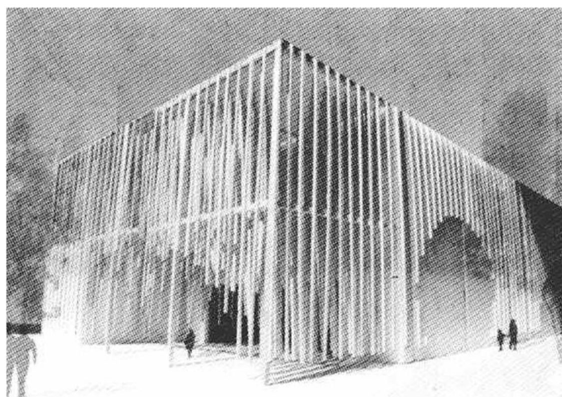
二、上海世博会中的数学

数学的发展也与世博会密不可分。其中最著名的例子就是在 1900 年的巴黎世博会上，世界各地的数学天才们竞相在此期间推出他们的成

果，其中最引人注目的就是数学天才黎曼，在这次世博会上，他提出了著名的“黎曼猜想”，从而用数学打开了一个世纪的空间革命。2010 年上海世博会中，数学再一次向世界秀出了奇迹。

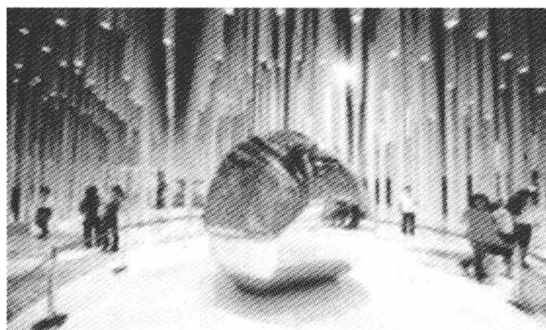
1. 匈牙利馆中的不倒“冈布茨”

匈牙利馆占地 1000 平方米。展馆设计为木质结构和音响系统充分结合，近 600 根悬挂的木套筒系统通过独特运动轨迹创造出一个如波浪般的声场，从哲学的角度，表现城市的发展、变化以及如脉搏跳动般的生命力。



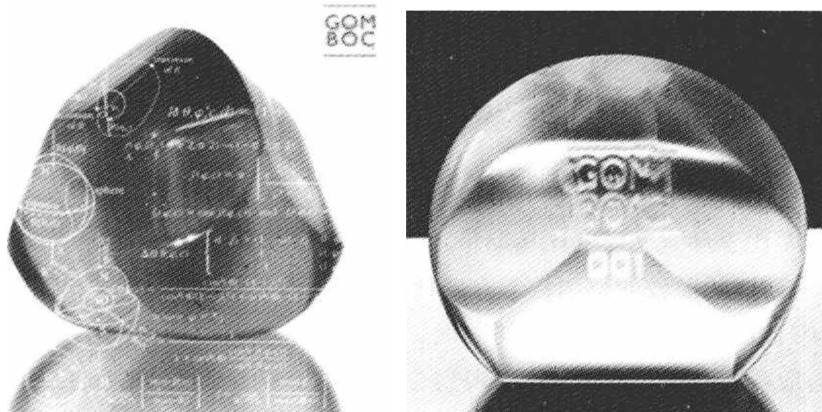
匈牙利馆

展馆内 600 多根木套筒包围着的是另一个引人驻足的展品——体积巨大并闪闪发光的“冈布茨”。30 多年前，匈牙利学者发明了魔方并参展了 1982 年美国诺克斯维尔世博会。上海世博会上，匈牙利人把 4 年前发明的“魔球”--- 冈布茨带到了上海。



匈牙利馆中的“冈布茨”

Gomboc-冈布茨外观上看起来类似乌龟壳，是一种三维凸均匀体。由匈牙利布达佩斯技术与经济大学(Budapest University of Technology and Economics)的两位数学家 Gabor Domokos 和 Peter Varkonyi 从乌龟壳造型中获得灵感，于 2006 年耗费 10 年时间创造的新物理形态——世界上首个只有一个稳定平衡点和一个非稳定平衡点、且两个点在同一平面上的均质物体。



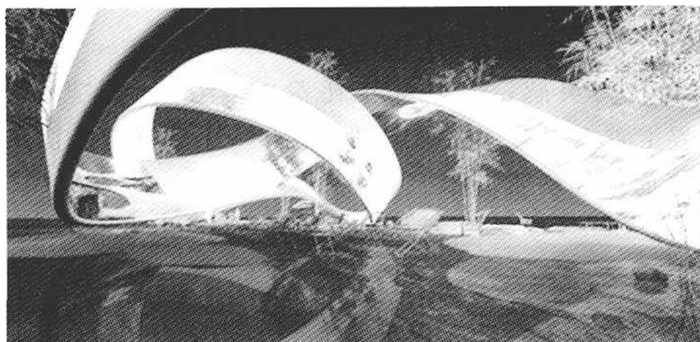
Gomboc-冈布茨

Gomboc-冈布茨最大的特点是，无论以何种角度将其放置在水平面上，它都可以自行回到其稳定点，很像不倒翁。但与不倒翁最大的不同是，不倒翁的重量集中在底部，是不均匀的，冈布茨却是质量均匀的。它象征平衡与和谐，象征着匈牙利民族总是能从挫折中"重新站立起来"的精神，也蕴含中华民族儒家文化中的阴阳、中庸理论。

2. 都市 · 桃花源湖南馆——"魔比思环"

湖南馆取名为"都市 · 桃花源"，建筑外观像一尊巨大的动态雕塑，难得的是主体建筑的外围与屏幕连成一体，将有鱼翔浅底、落英缤纷、碧水绿草、竹林幽谷等景致在上面呈现。湖南馆没有像其他馆一样设置参观路线，观众可以从该馆的数个方位进出，随意观看。展馆外形是一个"魔比思环"，在这个无始无终的曲面环上投映湖南回顾历史与畅想未来的画面，寓意人类对未来的期盼和追求永不停歇。展示分为"自然"区、"未来"区和"人文"区。"自然"区和"未来"区展示了湖南的自然风光，诠释了未来城市形态——生态环保、环境宜人、能源可循环利用、可持续发展的未来"都市

·桃花源”。在“人文”区，儿童可以在游戏中畅想未来城市的景象。



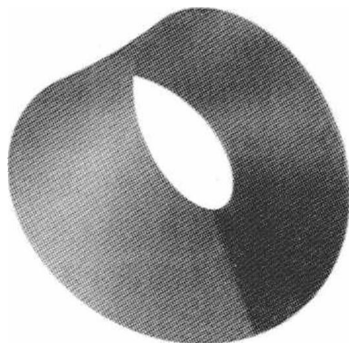
湖南馆效果图

“魔比思环”，又译麦比乌斯带，是数学里的概念。1858 年，曾做过著名数学家高斯的助教的德国数学家麦比乌斯(Moebius，1790—1868)与另一位数学家各自独立发现了单侧的曲面。这个曲面可以藉由一个有趣的实验获得：取一条长方形纸带，仔细观察会发现它有两个面和四条边。把一个短边扭转 180°后，与另一短边粘在一起，便成了一个“8”字形的环。这时候再来观察就会发现：这条纸带现在只有一个面和一条边。这便是著名的拓朴学结构，从此，以这位德国数学家自己名字命名的麦比乌斯带便名闻遐迩了。“魔比思环”的诞生使得数学的分支——拓扑学得以蓬勃发展。

“魔比思环”是一种没有内外之分的空间划分，亦即正面之中有反面，反面之中有正面，恰到好处地体现了古老的中国哲学中阴阳的流变统一过程。



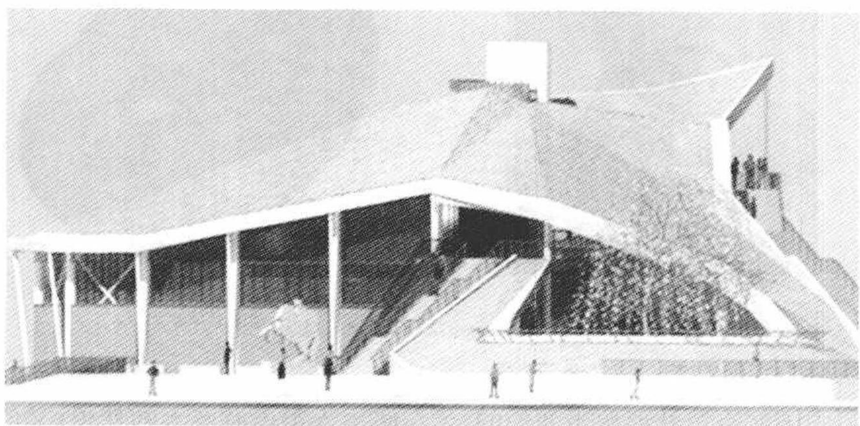
麦比乌斯(1790—1868)



“魔比思环”

3. 委内瑞拉馆——“克莱因瓶”

委内瑞拉馆用“魔比思环”的表现形式，它的三维立体结构被称为“克莱因瓶”，意为一个没有边界的、连续的闭合曲面，外面与内面相融汇。展馆在平面结构上近似数字“8”，以循环线结构模糊淡化了层次的界限，加强了空间的整体感。展馆内部包含一个广场，广场中心将放置一座南美解放者西蒙·玻利瓦尔的骑马塑像。步入展厅，参观者将看到象征祭拜祖先的场所夏波诺（Shapono），这儿是亚诺玛米（Yanomami）族人的公共生活区，在场馆设计中体现为一个环状长廊，中心为一个露天的庭院。

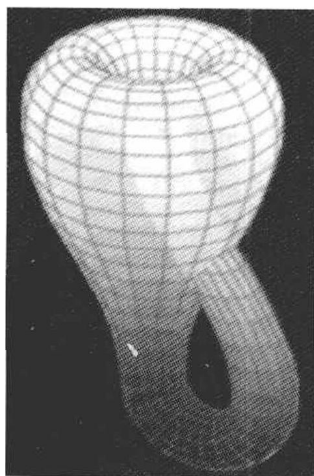


委内瑞拉馆效果图

“拓扑学”是数学中的一个重要分支，主要是研究几何图形连续改变形状时的一些特征和规律，“克莱因瓶”（Klein bottle）是拓扑学中一个著名的拓扑结构模型。

“克莱因瓶”是由一对“魔比思环”沿边界黏合而成的，因此“克莱因瓶”就成了个像球面那样封闭的（也就是说没有边）曲面，但是它却只有一个面。

“克莱因瓶”指一种无定向性的平面，比如二维平面就没有“内部”和“外部”之分。它是1882年由著名数学家菲立克斯·克莱因

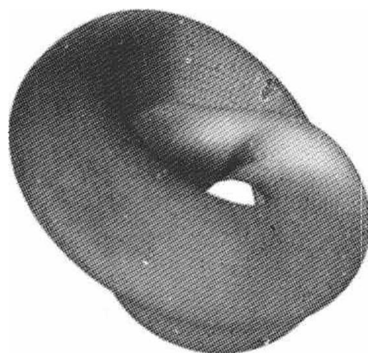


克莱因瓶（一）

(Felix Klein)发现的，后来以他的名字命名的著名“瓶子”。“克莱因瓶”和“魔比思环”非常相像。“克莱因瓶”的结构非常简单，就像是一个瓶子，但是它没有瓶底，它的瓶颈被拉长，然后似乎是穿过了瓶壁，最后瓶颈和瓶底圈连在了一起。如果瓶颈不穿过瓶壁而从另一边和瓶底圈相连的话，我们就会得到一个轮胎面(即环面)。



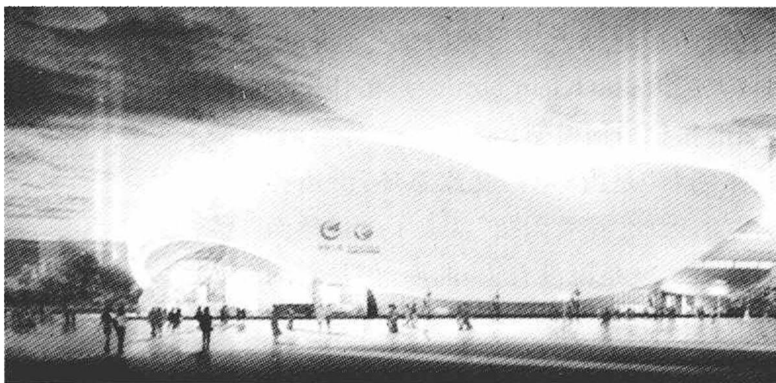
菲立克斯·克莱因(1849--1925)



克莱因瓶(二)

4. 中国航空馆——“∞”飞翔

中国航空馆外形源于变幻的“云”，暗示人类遨游蓝天的梦想；又似无限符号“∞”，象征宇宙的无限神秘，为航空发展提供无限可能，也寓意飞行为城市带来的无限变化，展馆昵称“飞无限”也由此而来。展馆外表覆



中国航空馆效果图

盖洁白的膜材，将“云”的联想带入参观者的眼帘，进而表现“飞”与“翔”的理念，表达人类超越地心引力的喜悦。

无穷大符号“∞”是17世纪出现的，一般数学史认为它是英国数学家约翰·沃利斯(John Wallis,1616—1703)首先使用的，“∞”第一次出现在他的《无尽算术》一书中。



约翰·沃利斯
(1616 1703)

思考题：

1. 生活中有哪些常见的“黄金分割率”？
2. 拓扑学如何应用在建筑中？

附录 1　数学与诺贝尔经济学奖

1. 1969 年,雷格纳尔・弗里希(挪威)和简・丁伯根(荷兰)

挪威经济学家弗里希、荷兰经济学家丁伯根因创立计量经济学,运用动态模型分析经济活动而共同获得首次设立颁发的诺贝尔经济学奖。

2. 1970 年,保罗・塞缪尔森(美国)

美国经济学家塞缪尔森因对经济理论的科学分析获诺贝尔经济学奖。

3. 1971 年,西蒙・史密斯・库兹涅茨(美国)

美国经济学家库兹涅茨因对国民生产总值和经济增长的开创性研究获诺贝尔经济学奖。

4. 1972 年,约翰・理查德・希克斯(英国)和肯尼斯・约瑟夫・阿罗(美国)

英国经济学家希克斯、美国经济学家阿罗因一般经济均衡理论和福利理论而共同获得诺贝尔经济学奖。

5. 1973 年,华西里・列昂捷夫(苏联)

苏联经济学家列昂捷夫发展了投入产出方法获诺贝尔经济学奖,该方法在许多重要的经济问题中得到运用。

6. 1974 年,纲纳・缪达尔(瑞典)和弗里德里希・冯・哈耶克(奥地利)

瑞典经济学家纲纳・缪达尔、英国经济学家弗里德里希・冯・哈耶克深入研究了货币理论和经济波动,并深入分析了经济、社会和制度现象的互相依赖。他们因在货币理论和经济周期理论方面的首创性研究而共同获得诺贝尔经济学奖。

7. 1975 年,列奥尼德・康托罗维奇(苏联)和佳林・库普曼斯(美国)

苏联经济学家列奥尼德・康托罗维奇、美国经济学家库普曼斯因资源最优利用理论而共同获得诺贝尔经济学奖。

8. 1976年，米尔顿·弗里德曼（美国）

美国经济学家米尔顿·弗里德曼因消费分析、货币理论和经济稳定性获诺贝尔经济学奖。

9. 1977年，戈特哈德·贝蒂·奥林（瑞典）和詹姆斯·爱德华·米德（英国）

瑞典经济学家戈特哈德·贝蒂·奥林因国际贸易理论体系、英国经济学家詹姆斯·爱德华·米德因国际贸易和国际资本移动理论而共同获得诺贝尔经济学奖。

10. 1978年，赫伯特·西蒙（美国）

美国经济学家赫伯特·西蒙因研究国际经济组织中的决断过程而获诺贝尔经济学奖。

11. 1979年，威廉·亚述·路易斯和西奥多·舒尔茨（美国）

美国经济学家威廉·亚述·路易斯因经济增长理论特别是发展中国家经济增长理论、美国经济学家西奥多·舒尔茨因发展中国家的经济、农业经济理论而共同获得诺贝尔经济学奖。

12. 1980年，劳伦斯·罗伯特·克莱因（美国）

美国经济学家劳伦斯·罗伯特·克莱因因商业波动经验模式的发展分析获诺贝尔经济学奖。

13. 1981年，詹姆士·托宾（美国）

美国经济学家詹姆士·托宾阐述和发展了凯恩斯的系列理论及财政与货币政策的宏观模型。在金融市场及相关的支出决定、就业、产品和价格等方面的分析做出了重要贡献。他因金融市场及其对企业和家庭消费的影响获诺贝尔经济学奖。

14. 1982年，乔治·斯蒂格勒（美国）

美国经济学家乔治·斯蒂格勒在工业结构、市场的作用和公共经济法规的作用与影响方面做出了创造性贡献。因对政府干预经济的影响研究成果获诺贝尔经济学奖。

15. 1983年，罗拉尔·德布鲁（美国）

美国经济学家罗拉尔·德布鲁概括了帕累拖最优理论，创立了相关商品的经济与社会均衡的存在定理。他因供求理论的数学证明获诺贝尔经济学奖。

16. 1984年,理查德·约翰·斯通(英国)

英国经济学家理查德·约翰·斯通因创立了计算国民收入的统一会计制度获诺贝尔经济学奖。

17. 1985年,弗兰科·莫迪利亚尼(意大利)

意大利经济学家弗兰科·莫迪利亚尼因储蓄和金融市场的开拓性研究获诺贝尔经济学奖。

18. 1986年,詹姆斯·麦基尔·布坎南(美国)

美国经济学家詹姆斯·麦基尔·布坎南因在公共选择理论研究中领先获诺贝尔经济学奖。

19. 1987年,罗伯特·索洛(美国)

美国经济学家罗伯特·索洛设计了一个理论架构,该架构可以用于从定量和理论的角度来讨论促进经济增长的各个要素,也可以用于从实证上度量不同生产要素对经济增长的贡献,从而获得诺贝尔经济学奖。

20. 1988年,莫里斯·阿莱斯(法国)

法国经济学家莫里斯·阿莱斯因对市场理论和最大效率理论作出的杰出贡献而获诺贝尔经济学奖。

21. 1989年,特里夫·哈维尔莫(挪威)

挪威经济学家哈维尔莫因提出验证经济理论的方法获诺贝尔经济学奖。

22. 1990年,哈里·马克威茨、默顿·米勒、威廉·夏普(美国)

美国经济学家马克威茨因发展了有价证券理论、美国经济学家米勒因对公司财政理论的贡献、美国经济学家夏普因提出资本资产定价模式而共同获得诺贝尔经济学奖。

23. 1991年,罗纳德·科斯(英国)

美国经济学家科斯因揭示交易价值在经济组织结构的产权和功能中的重要性获诺贝尔经济学奖。

24. 1992年,加里·贝克尔(美国)

美国经济学家加里·贝克尔因把微观经济学的研究领域延伸到人类行为及其相互关系方面的贡献获诺贝尔经济学奖。

25. 1993年,道格拉斯·诺斯、罗伯特·福格尔(美国)

美国经济学家道格拉斯·诺斯、罗伯特·福格尔因通过使用经济理

论和定量方法来解释经济与机构的变化，因而更新了经济历史的研究获诺贝尔经济学奖。

26. 1994年，约翰·福布斯·纳什（美国）、约翰·海萨尼（美国）、莱因哈德·泽尔腾（德国）

美国数学家约翰·纳什、约翰·海萨尼、莱因哈德·泽尔腾因在非合作博弈均衡分析理论方面做出了开创性贡献，从而对博弈论和经济学产生了重大影响，共同获得诺贝尔经济学奖。

27. 1995年，罗伯特·卢卡斯（美国）

美国科学家罗伯特·卢卡斯因倡导和发展了理性预期与宏观经济学研究的运用理论，深化了人们对经济政策的理解，并对经济周期理论提出了独到的见解而获得诺贝尔经济学奖。

28. 1996年，詹姆斯·莫里斯（英国）和威廉·维克瑞（美国）

英国科学家詹姆斯·莫里斯在信息经济学理论领域做出了重大贡献，尤其是不对称信息条件下的经济激励理论；美国经济学家威廉·维克瑞因在信息经济学、激励理论、博弈论等方面做出的重大贡献，而共同获得诺贝尔经济学奖。

29. 1997年，迈伦·斯科尔斯、罗伯特·默顿（美国）

美国科学家迈伦·斯科尔斯因给出了著名的布莱克-斯科尔斯期权定价公式，罗伯特·默顿因对布莱克-斯科尔斯公式所依赖的假设条件做了进一步减弱，并在许多方面对其做了推广，因而共同获得诺贝尔经济学奖。

30. 1998年，阿马蒂亚·森（印度）

阿马蒂亚·森因对福利经济学中的几个重大问题做出贡献，包括社会选择理论、对福利和贫穷标准的定义、对匮乏的研究等，而获得诺贝尔经济学奖。

31. 1999年，罗伯特·门德尔（加拿大）

罗伯特·门德尔因对不同汇率体制下货币与财政政策，以及最适宜的货币流通区域所做的分析，而获得诺贝尔经济学奖。

32. 2000年，詹姆斯·赫克曼、丹尼尔·麦克法登（美国）

詹姆斯·赫克曼、丹尼尔·麦克法登因发展了能广泛应用于个体和

家庭行为实证分析的理论和方法，而共同获得诺贝尔经济学奖。

33. 2001 年，约瑟夫·斯蒂格利茨、迈克尔·斯彭斯、乔治·阿克尔洛夫(美国)

约瑟夫·斯蒂格利茨、迈克尔·斯彭斯、乔治·阿克尔洛夫三位美国教授由于在“对充满不对称信息市场进行分析”领域所做出的重要贡献而分享该年度诺贝尔经济学奖。

34. 2002 年，丹尼尔·卡恩曼(美国、以色列)、弗农·史密斯(美国)

美国普林斯顿大学的丹尼尔·卡恩曼(拥有美国和以色列双重国籍)和弗农·史密斯因将源于心理学的综合洞察力应用于经济学的研究，从而为一个新的研究领域奠定了基础；美国乔治-梅森大学的弗农·史密斯因为实验经济学奠定了基础，他发展了一整套实验研究方法，并设定了经济学研究实验的可靠标准，因而共同获得诺贝尔经济学奖。

35. 2003 年，罗伯特·恩格尔(美国)、克莱夫·格兰杰(英国)

美国经济学家罗伯特·恩格尔和英国经济学家克莱夫·格兰杰，因在经济学时间数列分析方面所做出的贡献而共同分享诺贝尔经济学奖。

36. 2004 年，芬恩·基德兰德(挪威)和爱德华·普雷斯科特(美国)

挪威经济学家芬恩·基德兰德和美国经济学家爱德华·普雷斯科特，因他们在动态宏观经济学方面做出的杰出贡献而共同分享诺贝尔经济学奖。

37. 2005 年，罗伯特·奥曼(以色列)和托马斯·谢林(美国)

以色列耶路撒冷希伯来大学数学研究院教授罗伯特·奥曼和美国马里兰大学公共政策学院教授托马斯·谢林因在博弈论方面的贡献而共同分享诺贝尔经济学奖。

38. 2006 年，埃德蒙德·菲尔普斯(美国)

美国哥伦比亚大学的经济学博士埃德蒙德·菲尔普斯因研究宏观经济政策的杰出贡献能够帮助人们更好地理解通货膨胀及其对失业影响之间的关系而获得诺贝尔经济学奖。

39. 2007 年，莱昂尼德·赫维茨、埃里克·马斯金、罗杰·迈尔森(美国)

美国明尼苏达大学的赫维茨、芝加哥大学的马斯金，以及美国普林斯顿高等研究中心的罗杰·迈尔森因奠定机制设计理论基础而分享该年度

诺贝尔经济学奖。

40. 2008 年,保罗·克鲁格曼(美国)

美国普林斯顿大学教授保罗·克鲁格曼因在分析国际贸易模式和经济活动地域所做的贡献而获得诺贝尔经济学奖。

41. 2009 年,埃莉诺·奥斯特罗姆和奥利姆·E. 威廉森(美国)

美国印第安纳州大学经济学教授埃莉诺·奥斯特罗姆对公共经济管理行为研究做出了卓越的贡献,加州大学伯克利分校经济学家奥利姆·E. 威廉森对企业边界经济管理进行了分析,他们也因对经济管理行为的卓越分析而获得诺贝尔经济学奖。

42. 2010 年,彼得·戴蒙德(美国)、戴尔·莫特森(美国)和克里斯托弗·皮萨里德斯(英裔、塞浦路斯籍)

美国经济学家彼得·戴蒙德、戴尔·莫特森,英裔、塞浦路斯籍经济学家克里斯托弗·皮萨里德斯三位学者因对市场的分析而共同获得 2010 年诺贝尔经济学奖。他们认为:"市场大部分交易都是为贸易而进行的,当然会出现一些贸易摩擦,买者很难得到想要买的买品,而卖者很难找到消费者。在劳动力市场上许多公司也发现会有许多工作空缺,而一些失业人员找不到适合的工作岗位。"

附录 2　数学趣题

古今中外有许多有趣的数学题，在这里我们精选了几则，供大家欣赏。

1. 鸡兔同笼问题

这是我国一个著名的古代算题，大家可能早已听说过。该题原载于 1500 年前的《孙子算经》一书。题目是这样的：

有鸡、兔若干只，同放在一个笼子里，从上面数，共有 35 个头；从下面数，共有 94 只脚。问笼中鸡、兔各有几只？

这道题如果用代数方程来解当然很容易，只要设有 x 只鸡，y 只兔子，就可以列出如下方程组：

$$\begin{cases} x+y=35 \\ 2x+4y=94 \end{cases}$$

可是 1500 年前人们哪里会用方程啊！这里给大家介绍一下《孙子算经》中的解法。这是一种非常奇妙的方法，对于大家的思维会有启发。《孙子算经》用的是“砍足法”，这种思维方法今天称为“化归法”。解法如下：

先假定砍去每只鸡和每只兔一半的脚。这样一来，鸡剩 1 只脚，那么鸡的头数和脚数就相等了，而兔子就成了两脚兔。也就是说，每只兔子的脚数比头多 1，即有几只兔子就多出几只脚。这样一来就可以看出：此时脚的总数 47 与头的总数 35 的差就是多出的兔子脚数，也就是兔子的只数，显然兔子的只数是 $47-35=12$(只)，而鸡就是 $35-12=23$(只)了。

你看吧，这种方法多么奇妙！它是基于什么想出来的呢？

2. 百鸡问题

这个问题也是 1500 年以前，我国一本数学书里的问题，书名叫《张邱健算经》。题目是这样的：

今有鸡翁一，值钱五；鸡母一，值钱三；鸡雏三，值钱一。凡百钱买鸡百只，问鸡翁、母、雏各几何？

答曰：鸡翁四，值钱二十；鸡母十八，值钱五十四；鸡雏七十八，值钱二十六。又答：鸡翁八，值钱四十；鸡母十一，值钱三十三，鸡雏八十一，值钱二十七。又答：鸡翁十二，值钱六十；鸡母四，值钱十二，鸡雏八十四，值钱二十八。

这里的鸡翁是公鸡，鸡母是母鸡，鸡雏就是小鸡仔了。它们的价格分别是 5 个钱、3 个钱和 1/3 个钱一只。现在用 100 个钱买了 100 只鸡，问这 100 只鸡中，公鸡、母鸡、小鸡仔各是多少只？

这道题可没有鸡兔同笼问题那么好对付了，就是用方程也不好解，因为三个未知数却只给出了列两个方程的条件。我们设 x 为公鸡数，y 为母鸡数，z 为小鸡仔数，那么有方程：

$$\begin{cases}5x+3y+z/3=100\\x+y+z=100\end{cases}$$

这个方程组显然是没法解的。那么，书中是怎么解的呢？它没说。只给出了提示：如果少买 7 只母鸡，就可以多买 4 只公鸡和 3 只鸡仔。

这个问题难倒了不少人，到了 1815 年才有人用“大衍求一术”解决了这个问题，这里我们就不再介绍了。

3. 韩信乱点兵

韩信乱点兵又叫秦王点兵或鬼谷子点兵等，但还是叫“韩信点兵”的居多。韩信是中国古代有名的大将，以善于领兵和运用计谋著称。在楚汉相争中，刘邦用韩信做元帅才最终打败了力拔山、气盖世的项羽。相传韩信点兵的过程是这样的：

他让士兵排成三路纵队在他面前走过，这时他看到排尾剩下 2 个人；又让士兵成五路纵队走过，这时最后一排剩下 3 个人；最后让队伍成七路纵队，此时排尾依旧余 2 个人。这样韩信就知道了这支队伍共有 2333 个士兵。

这个题目实际上是《孙子算经》里的一道题。原题为：

今有物不知其数：现在三三数之二，五五数之三，七七数之二，问物几何？

翻译过来就是：现在有一种东西不知道它的数量。三个三个地数，剩下两个；五个五个地数，剩下三个；七个七个地数，剩下两个，问这种东西共是多少个？如果用数学语言表述就是：某数被 3 除余 2，被 5 除余 3，被 7 除余 2，求该数。

与百鸡问题不同，《孙子算经》对于这道题不仅给出了答案，也给出了算法。它的算法是这样的：先把 5 和 7 相乘，再乘以 2，得出 70。然后将 70 除以 3，余 1。又用 3 和 7 相乘，得出 21。将 21 除以 5，又余 1。再用 3 乘以 5 得 15，将 15 除以 7，也余 1。接着用“用 3 除余 2”的 2 和 70 相乘得 140。用“用 5 除余 3”的 3 和 21 相乘得 63。再用“用 7 除余 2”的 2 和 15 相乘得 30。然后三个乘积相加，得 233。再用 $3\times5\times7=105$ 去减那三个积的和，一直减到小于 105 为止，这时所得的差就是所求的数。最后这一步相当于用 105 去除求余数，这个数是 23。

以上算法用式子表示就是：

$$70\times2+21\times3+15\times2=233$$

$$233-(3\times5\times7)=128$$

$$128-105=23$$

我国明朝数学家程大位把这种解法归为四句口诀：

三人同行七十稀，
五树梅花开一枝，
七子团圆正半月，
除百零五便得知。

其意思就是：用 3 除的余数乘上 70，加上用 5 除的余数乘以 21，再加上用 7 除的余数乘上 15，最后减去 105 的倍数，剩下的就是所求的数了。

那么，答案不是 23 吗？韩信怎么点出来两千多个兵呢？其实，此题有多个答案，23 仅仅是其中的最简答案，也就是数最小的答案。

韩信点兵的问题也可以这样来考虑：

被 3 除余 2，被 7 除也余 2，那么这个数应该满足这样的条件，即用 3 与 7 的公倍数去除，也余 2。用式子表示就是 $21n+2$，其中 n 是整数。

按题意，这个数还要满足被 5 除时余 3 这个条件，也就是 $21n+2$ 被 5 除余 3。将不同的整数代入上式，我们会发现，满足这个条件的 n 应该是

1、6、11、16、21、26…其规律是每隔 5 个数就能满足，也就是说这样的 n 有一个特点，即它的尾数(或这个数本身)都是 1 或 6。我们可以找到很多个这样的 n，因此也就可以求得很多个这样的数。当 $n=1$ 时，$21n+2=23$，这是最简答案。

作为统帅的韩信当然会知道这支队伍大约有多少士兵。如果是两千多人，那么最简单的就是 $n=111$ 的时候，这个时候 $21n+2=21\times111+2=2333$。

4. 牛顿问题

大名鼎鼎的牛顿对数学趣题也很感兴趣。1707 年，他在自己的一本书中提出了一道非常有名的关于牛在草场吃草的问题。

这道题的前提是，假定每头牛每天吃草量不变，每头牛的吃草量相等，草场每天长草量不变。在这种情况下，在某一牧场里，养 27 头牛时，6 天把草吃尽；养 23 头牛时，9 天把草吃尽。那么，养 21 头牛几天能把牧场的草吃尽呢？

这个题目后来被人们称为"牛顿问题"。

这道题里有一个不变的数，就是每头牛一天的吃草量。因此，为简化问题，我们可以把它设为 1。由此，

27 头牛 6 天吃草量为 $27\times1\times6=162$，

23 头牛 9 天吃草量为 $23\times1\times9=207$。

注意：162 和 207 中包含了牧场 6 天和 9 天里新长出来的草的量。

那么，$207-162$ 就是 3 天里牧场新长出来的草的量，每天长草的量就是

$$(207-162)\div(9-6)=15$$

草场上原有的草为 $27\times1\times6-15\times6$(或 $23\times1\times9-15\times9$)等于 72。

设 21 头牛需 x 天把牧场的草吃尽，则

$$21\times1\times x=72+15x$$

解得 $x=12$，

所以，21 头牛 12 天可以把草吃尽。

5. 分马问题

这是一个古代的数学趣题。题的内容是这样的：一位老人有 11 匹

马，他临终时对三个儿子吩咐道，我这 11 匹马留给你们。你们要这样分配：老大拥有马数的 1/2，老二拥有马数的 1/4，而老三则拥有马数的 1/6。

我们先不说这种分配合不合理，就想想应该怎么分配吧！

老人的儿子们难住了。因为他们按老人临终的意思，实际上每人分得的马数都不是整数：老大是 11/2 匹，老二是 11/4 匹，老三是 11/6 匹。总不能把马杀了分肉吧？何况老人遗嘱说分马也不是分肉。没办法他们只好请教了一位聪明人。

聪明人牵来自己的一匹马。他说：现在有 12 匹马了，你们可以分了！于是老大分了 12/2=6 匹马，老二分了 12/4=3 匹马，老三分了 12/6=2 匹马，总共是 6+3+2，刚好 11 匹马！聪明人的马还由他自己牵回去了。

问题解决了，可有人提出异议：老人让分的是 11 匹马的 1/2、1/4、1/6，而不是 12 匹马的 1/2、1/4、1/6，这种方法不是老人的原本意思！但我们确实可以证明这是老人原来的意思：

按老人临终的意思，他三个儿子分得马匹的比例为：

$$1/2 : 1/4 : 1/6$$

12 是三个分母的公倍数，因此上式可以写成：6/12 ∶ 3/12 ∶ 2/12，即 6 ∶ 3 ∶ 2，聪明人分的应该是没错的。

6. 四对夫妻问题

有四对夫妻结伴旅游，途中他们共喝饮料 44 杯。其中四位妻子安妮、贝蒂、西莉亚和黛安所喝的饮料依次是 2 杯、3 杯、4 杯和 5 杯。四位丈夫埃克、弗兰克、盖尔和哈里所喝的饮料依次是各自妻子的 1 倍、2 倍、3 倍和 4 倍。问：他们谁与谁是夫妻？

这道题的特点是方程数少于未知数的个数。因此，解题需要技巧和讨论。

设埃克的妻子喝了 x 杯饮料，弗兰克的妻子喝了 y 杯饮料，盖尔的妻子喝了 z 杯饮料，哈里的妻子喝了 w 杯饮料，于是有

$$\begin{cases} x+y+z+w=2+3+4+5=14 \\ x+2y+3z+4w=44-14=30 \end{cases}$$

上式减去下式得

$$y+2z+3w=16$$

据题意，这个不定方程的解无非是2、3、4、5。因此可以对其中任一未知数用2、3、4、5代入，看看能否使其他未知数也能取得题目允许的值，并且使上面的方程成立。

现在代入w进行讨论：

若$w=5$，则$y+2z=1$。但已知y和z都至少2，所以出现矛盾。

若$w=4$，则$y+2z=4$。同样出现矛盾。

若$w=3$，则$y+2z=7$。只能是$y=3$，$z=2$，但已有$w=3$，这个情况也是不允许的。

因此，只能是$w=2$，此时$y+2z=10$。

亦即$y=4$，从而$z=3$，$x=5$。

于是有：

埃克的妻子喝了5杯，而据题意，喝5杯的是黛安；

弗兰克的妻子喝了4杯，而据题意，喝4杯的是西莉亚；

盖尔的妻子喝了3杯，而据题意，喝3杯的是贝蒂；

哈里的妻子喝了2杯，而据题意，喝2杯的是安妮。

谁与谁是夫妻已经清楚了。

7. 圆周率是有理数还是无理数的争论

1999年学科教学论研究生试题中，有一道开放题：1998年北京某报在《科学珍闻》栏目中报道了一则消息，标题是“圆周率并非无穷无尽”。全文如下：

目前，圆周率永远除不尽的神话，被加拿大一位年仅17岁的数学天才伯西瓦打破了。

伯西瓦在13岁曾在不列颠哥伦比亚省的一所大学进修课程。今年6月，他运用电子邮件与世界上的25台超级电脑连接，计算出圆周率是可以除尽的。他利用的是二进位算法，发现圆周率第5兆位的小数是零。也就是说，如果按十进位算法，圆周率的第12500亿位数应是它的尽头。

从前，人们都认为圆周除以直径的数字是除不尽的无理数，1998年9月，法国人贝拉尔把这个无理数算到了第1兆亿位小数，曾创下了世界纪录。

在19份答卷中，只有4份答卷指出：“这则报道是荒谬的，圆周率是

个无理数，这是科学道理，计算机不可能把它除尽。"有 2 份答卷表示担心："如果圆周率是有理数，以后中学里关于有理数怎么教？"其余 13 份答卷都大谈"在未来的信息社会里，技术进步使什么奇迹都能创造出来。如果圆周率是有理数，这是科学进步的标志。人们要更新观念，才能跟上时代的步伐。"这 13 份答卷就明显缺乏批判精神。

8. 一个简单的概率题引出的争论

1992 年第 10 期《读者文摘》上刊登了一道冠以"令人难以置信的答案"的概率智力测试题，题目是：有三扇可供选择的门，其中一扇门后面是一辆汽车，另两扇门后面是空的。测试者先让你随意挑选，在你选定后，比如选的 A 门，测试者将未选的两扇门中的一扇空门（比如是 B 门）打开，然后问你，为了有较大的机会选中汽车，你是坚持原来的选择，还是愿意换另一扇门（即弃 A 门，另选 C 门）？

这是美国《检阅》杂志的一个专栏上介绍的题。在美国大约上千所大中小学的学生从小学二年级到研究生卷入了激烈的讨论。给出的答案是应该换选另一扇门。专栏主持人收到了一万多封信件，其中有约一千封信出自具有博士头衔的读者之手，认为给出的答案是错的。

9. 谜语中寻找数学乐趣

(1)"干"——打一个数学名词（谜底是"近似于"）

(2)"考试不作弊"——打一个数学名词（谜底是"真分数"）

(3)"算术老师的教鞭"——打一个数学名词（谜底是"指数"）

(4)"会计查账"——打一个数学名词（谜底是"对数"）

(5)"继续比赛"——打一个数学名词（谜底是"连比"）

(6)"放风筝"——打一个数学名词（谜底是"延长线"）

(7)"诊断以后"——打一个数学名词（谜底是"开方"）

(8)"大同小异"——打一个数学名词（谜底是"近似"）

(9)"追本溯源"——打一个数学名词（谜底是"求根"）

(10)"一笔债务"——打一个数学名词（谜底是"负数"）

(11)"两牛打架"——打一个数学名词（谜底是"对等角"）

(12)"人民的力量"——打一个数学名词（谜底是"无穷大"）

(13)"十五只吊桶"——打一个数学名词（谜底是"$\frac{7}{8}$"）

(14)“大甩卖”——打一个数学名词(谜底是“绝对值”)

(15)“保持距离,同时起飞”——打一个数学名词(谜底是“平行线”)

(16)“减法没算对”——打一个数学名词(谜底是“误差”)

(17)“抬头望月,正好初八”——打一个数学名词(谜底是“正弦”)

(18)“身高”——打一个数学名词(谜底是“立体几何”)

(19)“车站广告”——打一个数学名词(谜底是“乘法”)

(20)“国外旅行”——打一个数学名词(谜底是“方程”)

(21)“新产品为何不出价”——打一个数学名词(谜底是“等价”)

(22)“信件统计”——打一个数学名词(谜底是“函数”)

10. 诗中自有算式出

北宋著名文学家苏轼,画了一幅“百鸟归巢图”,广东一位名叫伦文叙的状元,在他的画上题了一首诗:

归来一只又一只,三四五六七八只。

凤凰何少鸟何多,啄尽人间千石食。

画名为“百鸟归巢图”,但不见诗中有“百”,其实,诗中隐含的“百”是通过“一、一、三、四、五、六、七和八”算出来的,可谓妙趣横生,构思精巧,即

$$1+1+3\times4+5\times6+7\times8=100$$

11. 数学带来的怪事

(1)听人经常说:“我最恨数学了,因为都是数字。”可从来没有人说过:“我最恨钱了,因为都是数字。”

(2)“有趣的巴金生定理”:据说有一家英国大公司要投入很大的资金(约一亿元)去造一座核能发电厂,可是只花了5分钟的时间去讨论。没有人要知道一亿元到底是什么,能做多少事。可是在讨论去造一座员工停自行车的车库时,只需花一千元,就讨论了三个小时,因为每个人都知道一千元的意义,知道如何去花。巴金生定理之一就是:“钱数愈大,花在讨论怎样去使用的时间愈少。”

在教学中,要充分利用“罗森塔尔效应”,可能会收到意想不到的教学效果。

12. 数学家的语言

一个天文学家、一个物理学家和一个数学家正在苏格兰度假,当他们

从火车车厢向外瞭望时，观察到田地中央有一只黑色的羊，“多么有趣！”天文学家评论道，“所有的苏格兰羊都是黑色的。”物理学家对此反驳道：“不！不！某些苏格兰羊是黑色的。”而数学家若有所思地说：“你们都不对！在苏格兰至少存在一块田地，至少有一只羊，这只羊至少有一侧是黑色的。”

13. 奇妙的等式

请看下列一组等式：

$$\frac{5^3+2^3}{5^3+3^3}=\frac{5+2}{5+3}$$

$$\frac{7^3+3^3}{7^3+4^3}=\frac{7+3}{7+4}$$

$$\frac{9^3+5^3}{9^3+4^3}=\frac{9+5}{9+4}$$

……

通过观察，发现在一般情况下有：

$$\frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3}=\frac{a+b}{a+(a-b)}$$

因此，我们可以写出更复杂的等式：

$$\frac{2004^3+2003^3}{2004^3+1^3}=\frac{2004+2003}{2004+1}$$

14. 沁园春——数学

数学风光，无限魅力，万千符号；望银河内外，奥秘茫茫，空间变幻，数浪滔滔，线舞银蛇，图弛蜡象，欲与珠穆朗玛试比高，须回味。

赏图装数裹，分外妖娆，数学如此多娇，引无数英才竞折腰，惜语文英语，略输严谨，科学社会，稍逊精巧，现代工具，手机电脑，只能遵其命令指标，俱往矣，数科目奇葩，数学首当！

附录3　希尔伯特的23个问题

1900年，希尔伯特在巴黎数学家大会上提出了23个最重要的问题供20世纪的数学家们去研究，这就是著名的“希尔伯特23个问题”。

1975年，在美国伊利诺斯大学召开的一次国际数学会议上，数学家们回顾了四分之三个世纪以来希尔伯特23个问题的研究进展情况。当时统计，约有一半问题已经解决了，其余一半的大多数也都有了重大进展。

下面摘录的是1987年出版的《数学家小辞典》以及其他一些文献中收集的希尔伯特23个问题及其解决情况：

1. 连续统假设

1874年，康托猜测在可列集基数和实数基数之间没有别的基数，这就是著名的连续统假设。1938年，哥德尔证明了连续统假设和世界公认的策梅洛-弗伦克尔集合论公理系统的无矛盾性。1963年，美国数学家科亨证明了连续统假设和策梅洛-弗伦克尔集合论公理系统是彼此独立的。因此，连续统假设不能在策梅洛-弗伦克尔公理体系内证明其正确性与否。希尔伯特第1问题在这个意义上已获解决。

2. 算术公理的相容性

欧几里得几何的相容性可归结为算术公理的相容性。1936年，德国数学家根茨在使用超限归纳法的条件下证明了算术公理的相容性。

1988年出版的《中国大百科全书》(数学卷)指出，数学相容性问题尚未解决。

3. 两个等底等高四面体的体积相等问题

问题的意思是，存在两个等边等高的四面体，它们不可分解为有限个小四面体，使这两组四面体彼此全等。M. W. 德恩于1900年即对此问题给出了肯定的解答。

4. 两点间以直线为距离最短线问题

此问题提得过于一般。满足此性质的几何学很多，因而需增加某些限制条件。1973 年，苏联数学家波格列洛夫宣布，在对称距离情况下，问题获得解决。

注：《中国大百科全书》说，在希尔伯特之后，在构造与探讨各种特殊度量几何方面有许多进展，但问题并未解决。

5. 连续群的解析性

一个连续变换群的李氏概念，定义这个群的函数不假定是可微的 这个问题简称连续群的解析性，即：是否每一个局部欧氏群都一定是李群？中间经冯・诺伊曼（1933，对紧群情形）、庞德里亚金（1939，对交换群情形）、谢瓦莱（1941，对可解群情形）的努力，1952 年由格利森、蒙哥马利、齐宾共同解决，得到了完全肯定的结果。

6. 物理学的公理化

希尔伯特建议用数学的公理化方法推演出全部物理学，首先是概率论和力学。1933 年，苏联数学家柯尔莫洛夫实现了将概率论公理化。后来在量子力学、量子场论方面取得了很大成功。但是物理学是否能全盘公理化，很多人表示怀疑。

7. 某些数的无理性与超越性

1934 年，A. O. 盖尔方德和 T. 施奈德各自独立地解决了问题的后半部分，即对于任意代数数 $\alpha(\alpha \neq 0,1)$ 和任意代数无理数 β 证明了 α^{β} 的超越性。

8. 素数问题

包括黎曼猜想、哥德巴赫猜想及孪生素数问题等。一般情况下的黎曼猜想仍待解决。哥德巴赫猜想的最佳结果属于陈景润（1966），但离最终解决尚有距离。目前，孪生素数问题的最佳结果也属于陈景润。

9. 在任意数域中证明最一般的互反律

该问题已由日本数学家高木贞治（1921）和德国数学家 E. 阿廷（1927）解决。

10. 丢番图方程的可解性

能求出一个整系数方程的整数根，称为丢番图方程可解。希尔伯特

问，能否用一种由有限步构成的一般算法判断一个丢番图方程的可解性？1970 年，苏联的马季亚谢维奇证明了希尔伯特所期望的算法不存在。

11. 系数为任意代数数的二次型

H. 哈塞（1929）和 C. L. 西格尔（1936，1951）在这个问题上获得重要结果。

12. 将克罗克定理推广到任意的代数有理域上去

将阿贝尔域上的克罗克定理推广到任意的代数有理域上去，这一问题只有一些零星的结果，离彻底解决还相差很远。

13. 用只有两个变数的函数解一般的七次方程

七次方程的根依赖于 3 个参数 a、b、c，即 $x=x\ (a,b,c)$。这个函数能否用二元函数表示出来？苏联数学家阿诺尔德解决了连续函数的情形（1957），维士斯金又把它推广到了连续可微函数的情形（1964）。但如果要求是解析函数，则问题尚未解决。

14. 证明某类完备函数系的有限性

这与代数不变量问题有关。1958 年，日本数学家永田雅宜给出了反例。

15. 舒伯特计数演算的严格基础

一个典型问题是：在三维空间中有四条直线，问有几条直线能和这四条直线都相交？舒伯特给出了一个直观解法。希尔伯特要求将问题一般化，并给以严格基础。现在已有了一些可计算的方法，它与代数几何学不密切联系。但严格的基础迄今仍未确立。

16. 代数曲线和代数曲线面的拓扑问题

这个问题分为两部分：前半部分涉及代数曲线含有闭的分枝曲线的最大数目；后半部分要求讨论的极限环的最大个数和相对位置，其中 X、Y 是 x、y 的 n 次多项式。苏联的彼得罗夫斯基曾宣称证明了 $n=2$ 时极限环的个数不超过 3，但这一结论是错误的，已由中国数学家举出反例（1979）。

17. 半正定形式的平方和表示

一个实系数 n 元多项式对一切数组（$x_1,x_2,\cdots,x_n$）都恒大于或等于 0，是否都能写成平方和的形式？1927 年阿廷证明这是对的。

18. 用全等多面体构造空间

由德国数学家比勃马赫(1910)、莱因哈特(1928)作出部分解决。

19. 正则变分问题的解是否一定解析

对这一问题的研究很少。C. H. 伯恩斯坦和彼得罗夫斯基等得出了一些结果。

20. 一般边值问题

这一问题进展十分迅速,已成为一个很大的数学分支。目前还在继续研究。

21. 给定单值群微分方程解的存在性证明

具有给定单值群的线性微分方程解的存在性证明已由希尔伯特本人(1905)和 H. 罗尔(1957)的工作解决。

22. 由自守函数构成的解析函数的单值化

它涉及艰辛的黎曼曲面论,1907 年 P. 克伯获重要突破,其他方面尚未解决。

23. 变分法的进一步发展

这并不是一个明确的数学问题,只是谈了对变分法的一般看法。20 世纪以来变分法有了很大的发展。

参 考 文 献

1. 周金才，梁兮. 数学的过去、现在和未来. 北京：中国青年出版社，1982.

2. 齐民友. 数学与文化. 长沙：湖南教育出版社，1991.

3. [法]迪昂. 物理学理论的目的和结构. 李醒民译. 北京：华夏出版社，1999.

4. [美]M. 克莱因. 西方文化中的数学. 张祖贵译. 长沙：湖南科学技术出版社，2004.

5. 李文林. 数学史概论. 北京：高等教育出版社，2000.

6. [英]牛顿. 自然哲学的数学原理. 王克迪译. 西安：陕西人民出版社，武汉出版社，2001.

7. 郭剑波，程瑞. 论物理学与数学的关系——以时空理论发展为例. 自然辩证法研究，2008，24(5)：11-15.

8. 高策. 二叶理论. 杨振宁论数学与物理学的关系. 科学学研究，1991，9(1)：25-31.

9. 中国大百科全书编委会. 中国大百科全书——天文学卷. 北京：中国大百科全书出版社，1988.

10. 中国大百科全书编委会. 中国大百科全书——数学卷. 北京：中国大百科全书出版社，1980.

11. 贾贵山，牛石川. 星光探秘. 北京：华夏出版社，2000.

12. 范文澜. 中国通史简编. 北京：人民出版社，1965.

13. 范文澜，蔡美彪. 中国通史. 北京：人民出版社，1979.

14. 赵峥. 黑洞与弯曲的时空. 太原：山西科学技术出版社，2001.

15. 刘步林. 数学在天文学中的应用. 北京：科学出版社，1979.

16. 张顺燕. 数学与文化——在北大数学文化节上的报告. 数学通报，

2001(1):1-4.

17. 杨淑艳. 马尔萨斯人口理论浅析. 中国科技信息,2009(11):221.

18. 玉璋. 对数学与经济学关系的几点认识与思考. 商场现代化,2006,12:391-392.

19. 张昉. 埃舍尔作品中的科学与艺术. 科技信息(音体美),2010(4):286.

20. 顾沛. 数学文化. 北京:高等教育出版社,2008.

21. 史树中. 诺贝尔经济学奖与数学. 北京:清华大学出版社,2002:7

22. Li F T, Long T, Lu Y, Ouyang Q, and Tang C. *The yeast cell—cycle network is robustly designed*. PNAS,2004, 101:4781-4786.

23. Lei S F, Deng F Y,Li M X, Dvornyk V, and Deng H W. *Bone mineral density in elderly Chinese: effects of age, sex,weight,height, and body mass index*,J Bone Miner Metab,2004,22:71-78.

24. Damuth J D. *Common rules for animals and plants*. Nature,1998,395:115-116.

25. Smil V. *Laying down the law*. Nature,2000,403:597.

26. Whitfield J. *All creatures great and small*. Nature,2001,413:342-344.

27. West G B, Brown J H, and Enquist B J. *A general model for the origin of allometric scaling laws in biology*. Science,1997, 276:112-116.

28. Scheffer M, Carpenter S, Foley J A, Folkes C and Walker B. *Catastrophic shifts in ecosystems*. Nature,2001,413:591.

29. John Whitfield. *The Police state*. Nature,2002,416:782.

30. Kinosita K J, Yasuda R, Noji H, Ishiwata S, and Yoshida M. *F1-ATPase: A Rotary Motor Made of a Single Molecule*. Cell,1998,93:21-24.

31. Yildiz A, Tomishige M, Ronald D. *Vale,Raul R. Selvin, Kinesin Walks Hand-over-hand*. Science, 2004, 303:676-678.

32. Scott J F. *A history of Mathematics*. Taylor and Francis

Inc. ,1958.

33. The New Encyclopedia Britannica——Micropedia Encyclopedia Britannica. Inc. ,1986.

34. Hawking S T. *A Brief History of Time*. Writer's House Inc. , 1988.

35. http://baike. baidu. comview18930. htm# 1.

36. http://www. chinavalue. netWikiShowContent. aspx? TitleID =358759.

37. http://old. blog. edu. cn/user2/34371/archives㊤2056376. shtml.

38. http://www. patent-cn. com. 03/05/8808. shtml).

39. http://www. edu. cn/expo2010_9321/20100531/t20100531_480282. shtml).

40. http://baike. baidu. comview307178. htm.

41. http://news. dayoo. comexpohtml/200. html.

42. http://baike. baidu. comview1183282. htm?fr=ala0_1#5.

43. http://baike. baidu. comview65561. htm?fr=ala0_1_1.

44. http://news. dayoo. comexpohtml/241. html.

[General Information]
书名=数学与科学进步
作者=叶立军编著
页数=251
SS号=12774914
DX号=
出版日期=2011.01
出版社=浙江大学出版社

封面
书名
版权
前言
目录
第一章　数学及其发展简史
第一节　数学是什么
第二节　数学发展简史
第三节　数学发展史上的几次重大突破
第四节　近代数学的主要成就
第五节　现代数学的研究进展
第二章　作为思想史要素之一的数学
第一节　数学思想方法概述
第二节　数学思想方法在科学中的作用和地位
第三节　常用的数学思想方法
第三章　数学悖论与数学危机
第一节　数学悖论
第二节　数学危机
第三节　数学基础的三大学派
第四章　数学与物理学的发展
第一节　数学与物理基本概述
第二节　数学发展史上与物理学进步有关的事件
第三节　现代数学在物理学中的应用
第五章　数学与生物学、化学的发展
第一节　数学与生物学
第二节　当今生物学与数学的结合点
第三节　数学与医学
第四节　数学与化学
第五节　数学在化学中的应用——元素周期表的发现
第六章　数学与天文学、地理学的发展
第一节　数学与天文学发展概述
第二节　数学在天文学中的几个应用
第三节　数学与地理学的发展
第七章　数学与社会科学的发展
第一节　数学与政治
第二节　数学与战争
第三节　数学与经济

第八章　数学与文化艺术
第一节　数学与文化
第二节　数学与艺术
第三节　数学与建筑
附录1数学与诺贝尔经济学奖
附录2数学趣题
附录3希尔伯特的23个问题
参考文献